

CONCEPTE FUNDAMENTALE UTILE ÎN EXERCITAREA PROFESIEI DE INGINER

DISCIPLINA: REZISTENȚA MATERIALELOR

1. CARACTERISTICI GEOMETRICE ALE SUPRAFETELOR PLANE, SIMPLE: DREPTUNGHIALARA, CIRCULARA, INELARĂ

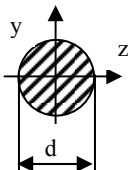
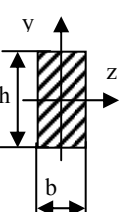
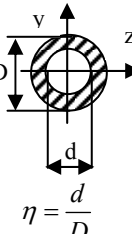
Rezolvare:

Caracteristicile geometrice utilizate frecvent în calculele de Rezistența Materialelor sunt:

- A [mm^2 , m^2 , cm^2] – aria suprafeței;
- I_z , I_y [mm^4 , m^4 , cm^4] – momente de inerție axiale;
- I_p [mm^4 , m^4 , cm^4] – moment de inerție polar;
- W_p [mm^3 , m^3 , cm^3] – modul de rezistență polar.

Formulele de calcul ale acestor mărimi sunt prezentate în tabelul 1.1.

Tabelul 1.1.

Suprafața	A	I_z	I_y	W_z	W_y	I_p	W_p
	$\frac{\pi \cdot d^2}{4}$	$\frac{\pi \cdot d^4}{64}$	$\frac{\pi \cdot d^4}{64}$	$\frac{\pi \cdot d^3}{32}$	$\frac{\pi \cdot d^3}{32}$	$\frac{\pi \cdot d^4}{32}$	$\frac{\pi \cdot d^3}{16}$
	$b \cdot h$	$\frac{b \cdot h^3}{12}$	$\frac{b^3 \cdot h}{12}$	$\frac{b \cdot h^2}{6}$	$\frac{b^2 \cdot h}{6}$	-	-
	$\frac{\pi \cdot D^2}{4} - \frac{\pi \cdot d^2}{4}$ $\frac{\pi \cdot D^2}{4} [1 - \eta^2]$	$\frac{\pi \cdot D^4}{64} \cdot [1 - \eta^4]$	$\frac{\pi \cdot D^4}{64} \cdot [1 - \eta^4]$	$\frac{\pi \cdot D^3}{32} \cdot [1 - \eta^4]$	$\frac{\pi \cdot D^3}{32} \cdot [1 - \eta^4]$	$\frac{\pi \cdot D^4}{32} \cdot [1 - \eta^4]$	$\frac{\pi \cdot D^3}{16} \cdot [1 - \eta^4]$

2. CALCULUL LA SOLICITAREA DE ÎNTINDERE ȘI COMPRESIUNE SIMPLĂ, MONOAXIALĂ A ELEMENTELOR DE REZISTENȚĂ (BARE, TIRANȚI, STĂLPI)

Rezolvare:

2.1. Formulele de calcul sunt:

- Pentru tensiunea normală, σ :

$$\sigma = \frac{N}{A} \text{ [Pa, MPa, } \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2} \approx \frac{\text{daN}}{\text{cm}^2} \text{]};$$

- Pentru lungirea elementului de rezistență, Δl :

$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A} \text{ [mm, m, cm] ,}$$

în care:

N [kN, N, daN] reprezintă forța axială;

A [m², mm², cm²] – aria secțiunii transversale;

l [m, mm, cm] – lungimea inițială a elementului de rezistență;

E [Pa, MPa, daN/cm²] – modulul de elasticitate longitudinală al materialului elementului de rezistență.

2.2. Dimensionarea:

a) Din condiția de rezistență: $\sigma \leq \sigma_a$; $A_{nec} = \frac{N}{\sigma_a}$; (2.1)

b) Din condiția de deformabilitate: $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \leq \varepsilon_a$; $A_{nec} = \frac{N}{E \cdot \varepsilon_a}$, (2.2)

unde: σ_a și ε_a reprezintă valorile admise (admisibile) pentru mărimile respective, specifice fiecărui material.

2.3. Verificarea:

a) Din condiția de rezistență: $\sigma_{ef} = \frac{N}{A_{ef}} = \dots \leq \sigma_a$, (2.3)

b) Din condiția de deformabilitate: $\varepsilon_{ef} = \frac{N}{E \cdot A_{ef}} = \dots \leq \varepsilon_a$. (2.4)

Mărimile efective calculate, σ_{ef} , ε_{ef} , se compară cu cele admisibile: σ_a , ε_a .

2.4. Capacitatea portantă:

a) Din condiția de rezistență: $N_{cap} = \sigma_a \cdot A_{ef}$; (2.5)

b) Din condiția de deformație: $N_{cap} = \varepsilon_a \cdot E \cdot A_{ef}$. (2.6)

Din formulele (2.5) și (2.6) se obține forța capabilă/maxim admisă care poate solicita piesa.

3. CALCULUL LA SOLICITAREA DE ÎNCOVOIERE SIMPLĂ.

Rezolvare:

3.1. Formula de calcul pentru tensiunea normală, σ , este cunoscută sub denumirea de „Formula lui Navier”:

$$\sigma_x = \frac{M_{iz}}{I_z} \cdot y ; \sigma_{\max} = \frac{|M_{iz \max}|}{W_{z \min}} , \text{ în care } W_{z \min} = \frac{I_z}{y_{\max}} ,$$

unde:

σ_x [Pa, MPa, daN/cm²] reprezintă tensiunea normală;

M_{iz} [N·mm, kN·m, daN·cm] – momentul încovoietor;

$I_z/W_{z \min}$ – moment de inerție axial/modul de rezistență axial;

y_{\max} [m, mm, cm] – distanța de la axa centrală, z, la fibra extremă a secțiunii în care se calculează σ .

3.2. Dimensionarea:

$$W_{nec} = \frac{|M_{iz \max}|}{\sigma_a} = \begin{cases} = \frac{\pi \cdot d^3}{32}; \\ = \frac{b \cdot h^2}{6}; \\ = \frac{\pi \cdot D^3}{32} \left[1 - \left(\frac{d}{D} \right)^4 \right]. \end{cases} \quad (3.1.)$$

Cunoscând momentul $M_{iz \max}$, din diagrama momentelor încovoietoare și tensiunea admisă, σ_a , rezultă dimensiunile secțiunii transversale.

3.3. Verificarea:

$$\sigma_{ef} = \frac{|M_{iz \max}|}{W_{z \min}} = \dots \leq \sigma_a . \quad (3.2)$$

Tensiunea efectivă, σ_{ef} , nu trebuie să depășească valoarea admisă, σ_a , pentru ca piesa (elementul de rezistență, grinda) să reziste în bune condiții.

3.4. Capacitatea portantă:

$$M_{izcap} = M_{iz \max, admis} = \sigma_a \cdot W_{z \min} . \quad (3.3)$$

Se obține valoarea momentului încovoietor maxim admis care poate fi aplicat unui element de rezistență (piesă).

4. CALCULUL PIESELOR CU SECTIUNE TRANSVERSALĂ CIRCULARĂ SAU INELARĂ LA TORSIUNE

Rezolvare:

4.1. Formule de calcul:

- Pentru tensiunea tangențială τ [$MPa, Pa, \frac{daN}{cm^2}$]:

$$\tau = \frac{M_t}{I_p} r; \tau_{max} = \frac{M_{tmax}}{W_p}, \text{ unde } W_p = \frac{I_p}{r_{max}};$$

- Pentru răsucirea specifică θ [$\frac{rad}{m}, \frac{rad}{mm}$]:

$$\theta = \frac{M_t}{G \cdot I_p},$$

în care:

M_t [$N \cdot mm, kN \cdot m, daN \cdot cm$] reprezintă momentul de torsiune (răsucire);

I_p [mm^4, cm^4, m^4] – momentul de inerție polar (vezi conceptul nr. 1);

W_p [mm^3, cm^3, m^3] – modulul de rezistență polar (vezi conceptul nr. 1);

G [$Pa, MPa, \frac{daN}{cm^2}$] – modulul de elasticitate transversal al materialului piesei.

4.2. Dimensionarea:

a) din condiția de rezistență ($\tau \leq \tau_a$): $W_{p_{nec}} = \frac{M_{tmax}}{\tau_a};$ (4.1);

b) din condiția de deformație ($\theta \leq \theta_a$): $I_{p_{nec}} = \frac{M_{tmax}}{G \cdot \theta_a}.$ (4.2).

Rezultă caracteristicile geometrice și dimensiunile piesei cu formulele din tabelul 1.1.

4.3. Verificarea:

a) $\tau_{ef} = \frac{M_{tmax}}{W_{p_{ef}}} = \dots \leq \tau_a;$ (4.3);

b) $\theta_{ef} = \frac{M_{tmax}}{G \cdot I_{p_{ef}}} = \dots \leq \theta_a.$ (4.4).

Valorile efective nu trebuie să depășească pe cele admisibile: τ_a, θ_a .

4.4. Capacitatea portantă:

a) $M_{t_{cap}} = M_{t_{max admis}} = \tau_a \cdot W_{p_{ef}};$ (4.5);

b) $M_{t_{cap}} = M_{t_{max admis}} = \theta_a \cdot G \cdot I_{p_{ef}}.$ (4.6).

Se obțin astfel valorile maxime admise pentru momentul de torsiune.

5. GRINZI DE EGALĂ REZISTENTĂ LA ÎNCOVOIERE – SOLUȚIA ECONOMICĂ DIN PUNCTUL DE VEDERE AL UTILIZĂRII MATERIALULUI. MOTIVUL REALIZĂRII. PRINCIPII DE CALCUL. REALIZARE PRACTICĂ.

Rezolvare:

O bară (grindă) având secțiune transversală constantă pe lungimea ei ($A = ct$, $I_p = ct$, $W_p = ct$ – vezi conceptul nr. 1) reprezintă o soluție neeconomică. Materialul este folosit economic numai unde momentul încovoiător este maxim pentru că $\sigma_{ef} = \sigma_a$ (vezi relațiile 3.1 și 3.2). În celelalte secțiuni, unde solicitarea este mai mică ($\sigma_{ef} \ll \sigma_a$), există surplus de material.

Soluția economică o reprezintă grinda de egală rezistență la care tensiunea efectivă are aceeași valoare în oricare secțiune de pe lungimea grinzii: $\sigma_{ef} = \sigma_0 = ct$ (de obicei, $\sigma_0 = \sigma_a$).

Acest lucru se realizează modificând dimensiunile secțiunii transversale pe lungimea grinzii $W_z(x) \neq ct$, proporțional cu valorile momentului încovoiător $M_{iz}(x) \neq ct$, astfel încât (vezi relația 3.1) raportul:

$$\frac{M_{iz}(x)}{W_z(x)} = \sigma_a = ct \text{ și } W_z(x) = \frac{M_{iz}(x)}{\sigma_a} \neq ct.$$

Exemplu pentru o axă cu secțiune transversală circulară: $W_z(x) = \frac{M_{iz}(x)}{\sigma_a} = \frac{\pi d_x^3}{32}$. Rezultă

$d_x = f(x)$ - o parabolă reprezentând soluția teoretică. Realizarea practică se face prin înfășurătoarea în trepte (fig. 5.1) a soluției teoretice (parabolă).

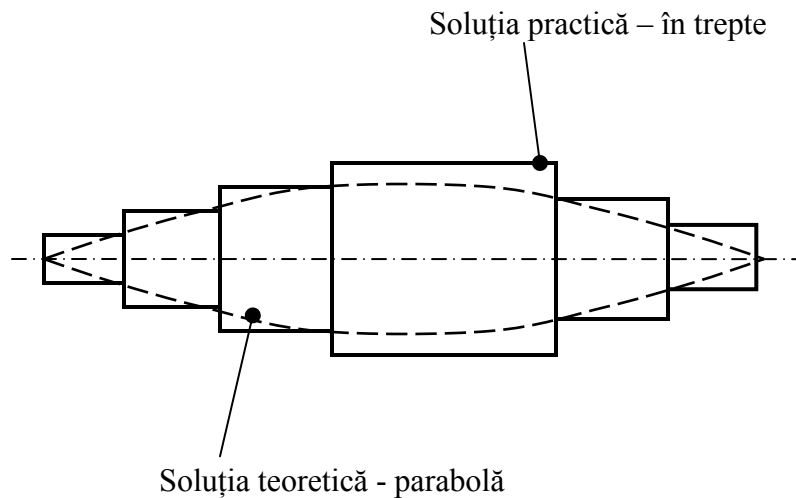


Figura 5.1

6. TEORII CLASICE DE REZISTENȚĂ (DE RUPERE, ALE STĂRILOR LIMITĂ). STAREA DE TENSIUNE LIMITĂ. TENSIUNEA ECHIVALENTĂ (DE COMPARATIE) PENTRU CAZUL ARBORILOR CONFECTIONATI DIN OTEL.

Rezolvare:

Starea de tensiune limită a materialului, în cazul solicitării de tracțiune axială, simplă, corespunde fie începerii ruperii ($\sigma = \sigma_r$), fie începerii curgerii ($\sigma = \sigma_c$), fie apariției unui proces fizic inadmisibil sau periculos.

Acestor caracteristici le corespund univoc altele, precum tensiunea tangențială (τ), deformația specifică (ϵ), sau energia de deformație (W). Acestea pot fi la fel de periculoase concomitent cu σ_c sau σ_r .

În cazul unor **stări de tensiune oarecare, complexe**, starea de tensiune limită se definește mai greu, deoarece nu se știe care dintre mărimile σ , ϵ , τ , W hotărăște procesul fizic periculos.

Teoriile de rezistență (de rupere, de stare limită) stabilesc criterii care permit calculul unei **tensiuni echivalente sau de comparație**.

Pentru arbori confecționați din oțel, solicitați la încovoiere (tensiunea normală σ) și la torsiune (tensiunea tangențială, τ), se folosesc formulele de calcul ale tensiunilor echivalente sub forma:

a) conform cu Teoria a treia a rezistenței materialelor (teoria tensiunii tangențiale maxime):

$$\sigma_{echiv(3)} = \sigma_{comp(3)} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \quad ; \quad (6.1)$$

b) după Teoria a cincea a rezistenței materialelor (teoria energiei specifice modificatoare de formă):

$$\sigma_{echiv(5)} = \sigma_{comp(5)} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \quad . \quad (6.2)$$

7. SOLICITĂRI COMPUSE. CE REPREZINTĂ, TIPURI (CLASIFICĂRI) ÎN FUNCȚIE DE SOLICITĂRILE SIMPLE CARE LE DEFINESC. PRINCIPII DE CALCUL.

Rezolvare:

Solicitările simple sunt determinate de eforturile: forță axială (N), forță tăietoare (T), moment încovoiător (M_i), moment de torsiune (M_t) care acționează fiecare singur (în absența celorlalte) pe un element de rezistență. Acestea produc tensiunile:

a) tensiunea normală σ : $\sigma_N = \pm \frac{N}{A}$, $\sigma_{M_i} = \pm \frac{M_i}{W}$;

b) tensiunea tangențială τ : $\tau_T = \pm \frac{T}{A}$, $\sigma_{M_z} = \pm \frac{M_z}{W_p}$,

în care:

A , W (W_z, W_y), W_p - vezi conceptul nr. 1.

În cazuri practice se întâlnește adesea acțiunea simultană a două sau mai multe eforturi, ceea ce conduce la apariția **solicitărilor compuse**. În acest caz, felul în care se compun eforturile depinde de natura tensiunilor σ și τ pe care le determină, astfel:

I. Solicitări compuse în care apar tensiuni de aceeași natură

În acest caz, tensiunile se însumează algebric:

$$\sigma_{total} = \pm \sigma_N \pm \sigma_{M_i}; \quad \tau_{total} = \pm \tau_T \pm \tau_{M_T}. \quad (7.1)$$

II. Solicitări compuse în care apar tensiuni de natură diferită

În această situație, tensiunea totală (echivalentă, de comparație) se determină cu una din teoriile de rezistență.

De exemplu, pentru un arbore solicitat la încovoiere și torsiune, tensiunea echivalentă (vezi conceptul nr. 6) este:

$$\sigma_{echiv} = \sigma_{comp} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}. \quad (7.2)$$

8. METODE ENERGETICE PENTRU CALCULUL DEFORMAȚIILOR.

METODA MOHR-MAXWELL PENTRU CALCULUL DEFORMAȚIILOR BARELOR DREPTE (GRINZILOR) SOLICITATE LA ÎNCOVOIERE.

APLICAȚIE PE UN EXEMPLU SIMPLU.

Rezolvare :

Deformațiile liniare (Δ) sau unghiulare (φ) se pot calcula cu *formula Mohr-Maxwell* (Metoda forței unitare) după cum urmează:

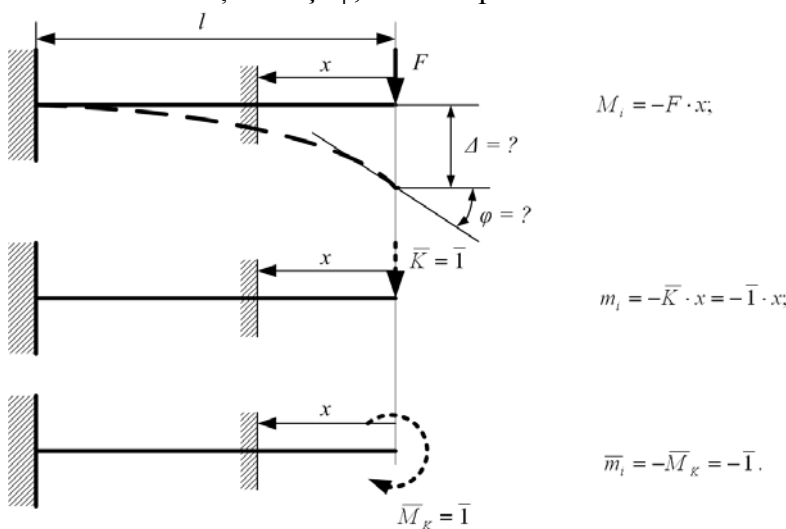
$$\bar{1} \cdot \Delta = \sum \int_0^l \frac{M_i \cdot m_i}{EI} dx \quad (8.1); \quad \bar{1} \cdot \varphi = \sum \int_0^l \frac{M_i \cdot \bar{m}_i}{EI} dx \quad (8.2),$$

unde:

- M_i reprezintă legile de variație (ecuațiile) ale momentului încovoiator produs de încărcările exterioare date;
- m_i, \bar{m}_i reprezintă legile de variație ale momentelor încovoiatoare produse de o forță unitară ($\bar{K} = \bar{1}$, pentru m_i), respectiv un moment unitar ($\bar{M}_K = \bar{1}$, pentru \bar{m}_i).

Integralele se efectuează pe domenii (tronsoane) ale grinzii, pe care atât M_i cât și m_i sau \bar{m}_i au legi proprii unice.

Exemplu: se calculează deformațiile Δ și φ , indicate pe desen:



Rezultă:

$$\text{Relația (8.1): } \bar{1} \cdot \Delta = \sum_0^l \frac{M_i \cdot m_i}{EI} dx = \int_0^l \frac{(-F \cdot x)(-\bar{1} \cdot x)}{EI} = \frac{Fl^3}{3EI};$$

$$\text{Relația (8.2): } \bar{1} \cdot \varphi = \sum_0^l \frac{M_i \cdot \bar{m}_i}{EI} dx = \int_0^l \frac{(-F \cdot x)(-\bar{1})}{EI} = \frac{Fl^2}{2EI}.$$

9. STABILIREA ECHILIBRULUI ELASTIC: FLAMBAJUL BARELOR DREPTE. DIMENSIONAREA BARELOR LUNGI SOLICITATE LA COMPRESIUNE, ARTICULATE LA AMBELE CAPETE, ÎN DOMENIUL FLAMBAJULUI ELASTIC.

Rezolvare

Calculul forței critice la flambaj în domeniul elastic se efectuează cu *formula lui Euler*:

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{\min}}{l_f^2}, \quad (9.1)$$

unde:

- I_{\min} reprezintă momentul de inerție axial minim (v. tab. 1.1);
- l_f este lungimea critică de flambaj; pentru bara articulată la ambele capete $l_f = l$ (l – lungimea barei);
- E este modulul de elasticitate longitudinală a materialului barei.

Cunoscând coeficientul de siguranță la flambaj, c_f , forța admisă/capabilă este:

$$F_a = \frac{F_{cr}}{c_f}. \quad (9.2)$$

Dimensionarea la flambaj se face considerând forța admisă egală cu forța dată, F , care comprimă bara: $F_a = F$.

$$F_a = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{\min}}{c_f \cdot l_f^2} = F \text{ de unde rezultă } I_{\min} = \frac{F \cdot c_f \cdot l_f^2}{\pi^2 \cdot E} \quad (9.3)$$

În cazul secțiunii transversale circulare, respectiv dreptunghiulare a barei, momentele de inerție sunt (v. tab. 1.1): $I_{\min} = \frac{\pi \cdot d^4}{64}$ respectiv $I_{\min} = \frac{b^3 h}{12}$.

Înlocuind expresiile momentului de inerție minim în rel. (9.3) rezultă dimensiunile necesare. Însă trebuie *verificat* dacă dimensiunile găsite situează bara în domeniul flambajului elastic. Pentru a verifica acest lucru, se calculează *coeficientul de zveltețe* efectiv:

$$\lambda = \frac{l_f}{i_{\min}}, \text{ unde } i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} - \text{raza de girație.}$$

Posibilități:

- a. Dacă $\lambda > \lambda_0 = 100$ (pentru bare din oțel), bara se situează în domeniul flambajului elastic și calculul este încheiat;
- b. Dacă $\lambda < \lambda_0 = 100$, domeniul flambajului este cel elasto-plastic, pentru care se face verificarea dimensiunilor obținute cu formulele corespunzătoare acestui domeniu (Formulele Tetmajer-Iasinski).

10 OBOSEALA MATERIALELOR.

CE REPREZINTĂ ACEST FENOMEN?

FACTORII CARE INFLUENȚEAZĂ REZISTENȚA LA OBOSEALĂ A UNEI PIESE/STRUCTURI PORTANTE.

Rezolvare:

Practica inginerescă a dovedit că elementele de rezistență (piese sau structuri portante) supuse unor sarcini variabile în timp se pot rupe în funcționare îndelungată, deși tensiunile maxime care apar sunt inferioare rezistenței la rupere sau chiar a limitei de elasticitate a materialului.

Acest aspect, inițial neclar, s-a numit *oboseală*, înțelegându-se modificarea în timp a proprietăților materialelor, sub acțiunea unor cicluri de solicitare a căror repetare conduce în final la ruperea elementelor de rezistență. Durata de viață a unei piese se măsoară de obicei prin numărul de cicluri N până la rupere.

Principalii factori care influențează rezistența la oboseală a unei piese/structuri portante sunt:

- a. **Concentratorii de tensiune** – apar la modificările mărimilor secțiunilor prin racordări, caneluri sau prin strângeri provocate de piesele (ex. inelele rulmenților) din ansamblul construcției;
- b. **Dimensiunile piesei** – rezistența la oboseală a materialului se determină prin încercarea epruvetelor cu dimensiuni standardizate (ex. $d_0 = 10$ mm). Piesele au dimensiuni diferite de acestea, fapt care influențează rezistența la oboseală;
- c. **Factorii tehnologici:**
 1. *Calitatea (starea) suprafeței piesei.* Creșterea rugozității suprafeței determină scăderea rezistenței la oboseală. Urmele care rămân de la prelucrarea piesei constituie adevărați concentratori de tensiune, din care se amorsează fisura de oboseală;
 2. *Tratamentele de suprafață:*
 - Mecanice: trefilare, ambutisare, laminare;
 - Tensiuni remanente;
 - Tratamente termochimice;
 - Acoperiri galvanice.
- d. **Condițiile de lucru:**
 - Felul solicitării;
 - Felul ciclului de solicitare;
 - Suprasolicitarea/subsolicitarea;
 - Mediu de lucru (apă de mare, apă dulce, aer uscat).

Bibliografie

1. Buzdugan, Gh. – *Rezistența Materialelor*, Editura Tehnică, București, 1980
2. Dumitru, I., Faur, N. – *Elemente de calcul și aplicații în Rezistența Materialelor*, Editura Politehnica, Timișoara, 1999
3. Neguț, N. – *Rezistența Materialelor*, Editura Politehnica, Timișoara, 2003
4. Tripa, P., Hluscă, M. – *Rezistența Materialelor. Noțiuni fundamentale și aplicații*, vol. 1-2, Editura Mirton, Timișoara, 2006