2. Cinematica roboţilor industriali

2.1. Modelul matematic al manipulării obiectelor de lucru de către robot

Fie un obiect de lucru (piesă sau sculă) căruia i se ataşează un sistem de referinţă Oxyz. Acest obiect de lucru este prehensat[1] de către robot, prin dispozitivul său de prehensiune sau este fixat de flanşa robotului şi ocupă diferite situări în spaţiul de lucru. În figura 2.1 se prezintă un obiect cilindric şi sistemul de referinţă ataşat acestuia, în diverse poziţii[2] în spaţiu şi cu orientări[3] diferite.

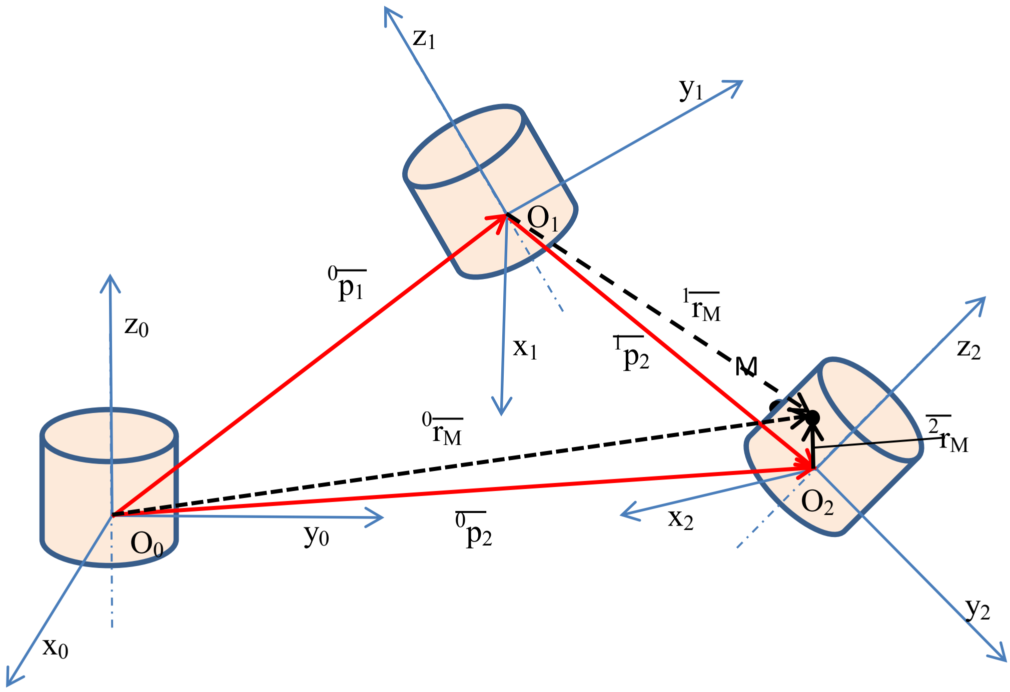


Figura 2.1. Modelul grafic al manipulării obiectului de lucru de către robot

Fie vectorul de poziţie al originii O_1 în raport cu sistemul $O_0x_0y_0z_0$, notat cu $^0\overline{p_1}$, similar vectorul de poziţie al originii O_2 faţă de sistemul $O_1x_1y_1z_1$ este notat cu $^1\overline{p_2}$, vectorul de poziţie al punctului M faţă de sistemul $O_2x_2y_2z_2$ este notat cu $^2\overline{r_M}$, etc.

Conform figurii 2.1, este evidentă relaţia:

$$\overline{^0r_M} = \overline{^0p_2} + \overline{^2r_M} \tag{2.1}$$

$$\overline{^2r_M} = {^2x_M} \cdot \overline{\iota_2} + {^2y_M} \cdot \overline{\jmath_2} + {^2z_M} \cdot \overline{k_2} \tag{2.2}$$

[1] **PREHENSIÚNE** *s. f.* acţiunea mâinii de a prinde, de a apuca cu ajutorul degetelor, ghearelor, al unei pense etc. (< fr. *préhension*).

[2] Poziţiile punctelor O_0, O_1, O_2.

[3] Orientarea sistemului de referinţă "1" faţă de "2" este determinată de unghiurile dintre axele sistemului $O_1x_1y_1z_1$ cu fiecare dintre axele sistemului $O_2x_2y_2z_2$.

unde ${}^2x_M$, ${}^2y_M$, ${}^2z_M$ sunt coordonatele carteziene ale punctului M faţă de sistemul de coordonate $O_2x_2y_2z_2$, iar i_2, j_2, k_2 sunt versorii axelor sistemului de referinţă 2.

Similar, $\overline{{}^0p_2} = {}^0x_{O_2} \cdot \overline{\iota_0} + {}^0y_{O_2} \cdot \overline{J_0} + {}^0z_{O_2} \cdot \overline{k_0}$. (2.3)

Sistemele de referinţă implicate în relaţiile 2.1, 2.2, 2.3 sunt prezentate în figura 2.2.

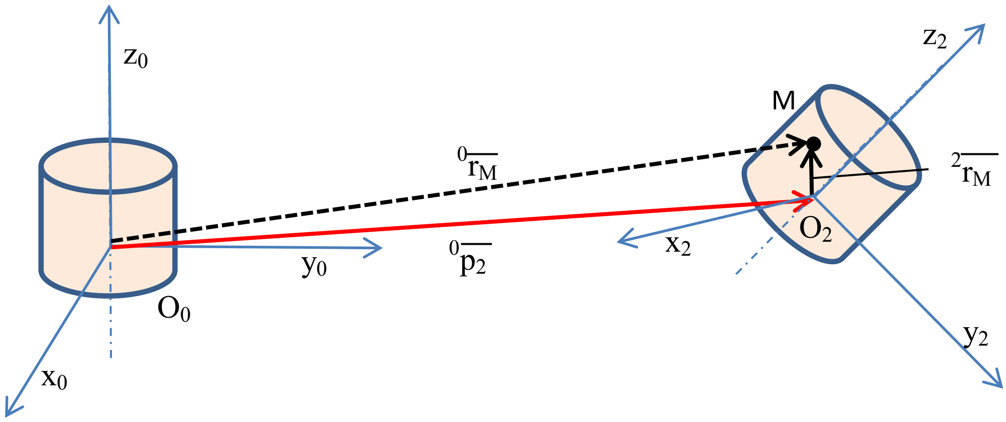


Figura 2.2. Detaliu al figurii 2.1, pentru poziţia obiectului de lucru în situarea (2)

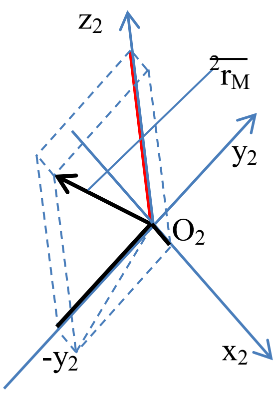
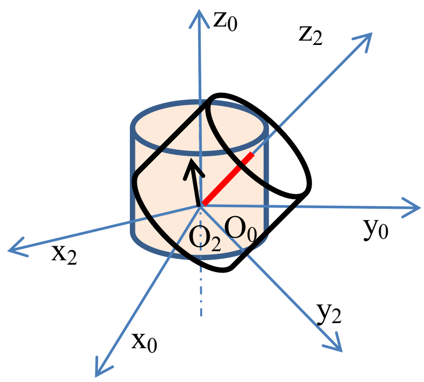
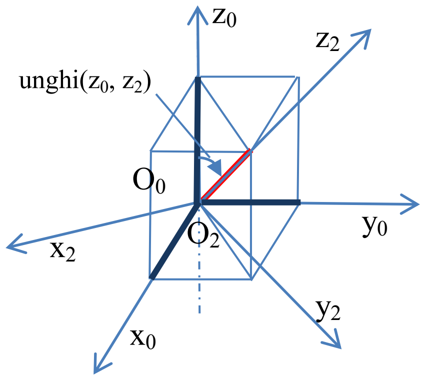
		
(a) Proiecţiile lui ${}^2r_M$ pe direcţiile axelor O_2x_2, O_2y_2, O_2z_2 cu roşu este ${}^2z_M$	(b) Translaţia obiectului de lucru din situarea 2, astfel încât O_0 şi O_2 să coincidă	(c) Proiecţiile lui ${}^2z_M$ pe direcţiile axelor O_0x_0, O_0y_0, O_0z_0; lungimea proiecţiei pe O_0z_0 este ${}^2z_M\cos(z_0, z_2)$; similar, lungimea proiecţiei pe O_0x_0 este ${}^2z_M\cos(x_0,z_2)$, lungimea proiec-ţiei pe O_0y_0 este ${}^2z_M\cos(y_0, z_1)$, etc.

Figura 2.3. Detalii ale figurii 2.1 (continuarea figurii 2.2)

În relaţia 2.1 se înlocuiesc termenii sumei şi se obţine:

$$\overline{{}^0r_M} = \overline{{}^0p_2} + \overline{{}^2r_M} = {}^0x_{O_2} \cdot \overline{\iota_0} + {}^0y_{O_2} \cdot \overline{J_0} + {}^0z_{O_2} \cdot \overline{k_0} + {}^2x_M \cdot \overline{\iota_2} + {}^2y_M \cdot \overline{J_2} + {}^2z_M \cdot \overline{k_2}$$

(2.4)

Se observă că termenii ${}^2x_M$, ${}^2y_M$ · ${}^2z_M$ sunt proiecţiile vectorului ${}^2r_M$ (coordonatele lui M faţă de sistemul de referinţă 2). În figura 2.3 c se observă cum ${}^2z_M$ se proiectează pe axele sistemului $O_0x_0y_0z_0$ şi care sunt lungimile acestor proiecţii.

Dacă înlocuim în relaţia 2.4, avem:

$$\overline{{}^0r_M} = {}^2x_M \cdot \overline{i_2} + {}^2y_M \cdot \overline{j_2} + {}^2z_M \cdot \overline{k_2} + {}^0x_{O_2} \cdot \overline{i_0} + {}^0y_{O_2} \cdot \overline{j_0} + {}^0z_{O_2} \cdot \overline{k_0} =$$

$$= {}^2x_M \cdot \cos(i_0, i_2) + {}^2x_M \cdot \cos(j_0, i_2) + {}^2x_M \cdot \cos(k_0, i_2) +$$

$$+ {}^2y_M \cdot \cos(i_0, j_2) + {}^2y_M \cdot \cos(j_0, j_2) + + {}^2y_M \cdot \cos(k_0, j_2) +$$

$$+ {}^2z_M \cdot \cos(i_0, k_2) + {}^2z_M \cdot \cos(j_0, k_2) + {}^2z_M \cdot \cos(k_0, k_2) +$$

$$+ {}^0x_{O_2} \cdot \overline{i_0} + {}^0y_{O_2} \cdot \overline{j_0} + {}^0z_{O_2} \cdot \overline{k_0} \tag{2.5}$$

Dacă se rearanjează relaţia 2.5, separând coordonatele ${}^0r_M$, avem:

$$\begin{aligned}
{}^0x_M &= {}^2x_M \cdot \cos(i_0, i_2) + {}^2y_M \cdot \cos(i_0, j_2) + {}^2z_M \cdot \cos(i_0, k_2) + {}^0x_{O_2} \cdot \overline{i_0};\\
{}^0y_M &= {}^2x_M \cdot \cos(j_0, i_2) + {}^2y_M \cdot \cos(j_0, j_2) + {}^2z_M \cdot \cos(j_0, k_2) + {}^0y_{O_2} \cdot \overline{j_0};\\
{}^0z_M &= {}^2x_M \cdot \cos(k_0, i_2) + {}^2y_M \cdot \cos(k_0, j_2) + {}^2z_M \cdot \cos(k_0, k_2) + {}^0z_{O_2} \cdot \overline{k_0};
\end{aligned} \tag{2.6}$$

O altă formă (mai compactă a relaţiilor 2.6), în care $\cos(i_0, i_2) = \cos(x_0, x_2)$, este:

$$\begin{bmatrix} {}^0x_M \\ {}^0y_M \\ {}^0z_M \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(x_0, x_2) & \cos(x_0, y_2) & \cos(x_0, z_2) & {}^0x_{O_2} \\ \cos(y_0, x_2) & \cos(y_0, y_2) & \cos(y_0, z_2) & {}^0y_{O_2} \\ \cos(z_0, x_2) & \cos(z_0, y_2) & \cos(z_0, z_2) & {}^0z_{O_2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^2x_M \\ {}^2y_M \\ {}^2z_M \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

Sau

$$\underline{{}^0r_M} = \underline{{}^0T_2} \cdot \underline{{}^2r_M}, \tag{2.8}$$

unde $\underline{{}^0T_2}$ este matricea de transformare a coordonatelor unui punct din sistemul de coordonate 2 în sistemul 0 sau matricea de trecere din sistemul 2 în 0.

$$\begin{bmatrix} \cos(x_0, x_2) & \cos(x_0, y_2) & \cos(x_0, z_2) \\ \cos(y_0, x_2) & \cos(y_0, y_2) & \cos(y_0, z_2) \\ \cos(z_0, x_2) & \cos(z_0, y_2) & \cos(z_0, z_2) \end{bmatrix} \textit{este submatricea de orientare};$$

$$\begin{bmatrix} {}^0x_{O_2} \\ {}^0y_{O_2} \\ {}^0z_{O_2} \end{bmatrix} \textit{este submatricea de poziționare}$$

Dacă cele două sisteme sunt ambele situate în acelaşi plan sau în plane paralele, matricea ${}^0T_2$ devine:

$$\underline{{}^{0}T_2} = \begin{bmatrix} \cos(x_0, x_2) & \cos(x_0, y_2) & {}^{0}x_{O_2} \\ \cos(y_0, x_2) & \cos(y_0, y_2) & {}^{0}y_{O_2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Luând în considerare notaţiile din figura 2.1, similar cu ecuaţia 2.8, putem deduce şi relaţiile:

$$\overline{{}^{1}r_M} = \overline{{}^{1}p_2} + \overline{{}^{2}r_M},$$

$$\overline{{}^{0}p_2} = \overline{{}^{0}p_1} + \overline{{}^{1}p_2} \tag{2.9}$$

Dacă înlocuim în relaţia 2.1 relaţiile 2.9, obţinem:

$$\overline{{}^{0}r_M} = \overline{{}^{0}p_2} + \overline{{}^{2}r_M} = \overline{{}^{0}p_1} + \overline{{}^{1}p_2} + \overline{{}^{2}r_M} = \overline{{}^{0}p_1} + \overline{{}^{1}r_M} \tag{2.10}$$

Se înlocuiesc relaţiile 2.9 şi 2.10 cu notaţiile din 2.8 şi avem:

$$\overline{{}^{0}r_M} = \underline{{}^{0}T_2} \cdot \overline{{}^{2}r_M} = \underline{{}^{0}T_1} \cdot \underline{{}^{1}T_2} \cdot \overline{{}^{2}r_M};\ \underline{{}^{0}T_2} = \underline{{}^{0}T_1} \cdot \underline{{}^{1}T_2} \tag{2.11}$$

2.2. Modelul matematic al unei aplicaţii robotizate

Fie o aplicaţie realizată de către un robot industrial, în care acesta manipulează o piesă situată pe o masă. Robotului i se ataşează un sistem de referinţă denumit în figura 2.4 „baza robotului” (X_R, Y_R, Z_R) , mesei din periferia robotului i se ataşează sistemul denumit „masa” (X_M, Y_M, Z_M), iar piesei de manipulat „piesa” (X_P, Y_P, Z_P). Se cunosc coordonatele punctelor de pe piesă (de exemplu din fişiere CAD).

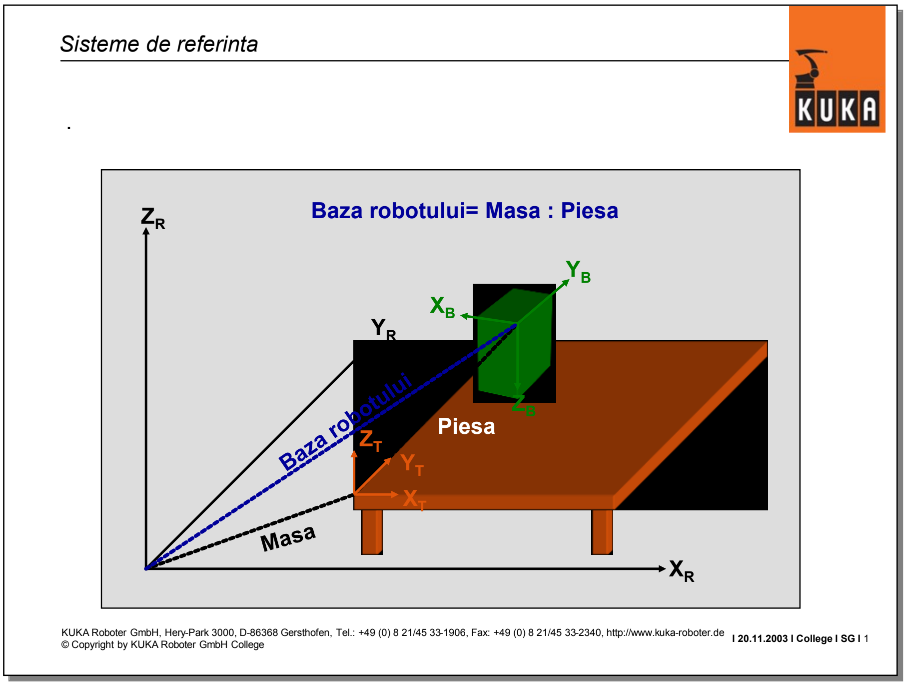


Figura 2.4. Aplicaţie industrială robotizată şi sisteme de referinţă ataşate periferiei robotului

Este cunoscută situarea piesei pe masă, adică matricea de transformare ${}^{M}T_P$ şi situarea mesei faţă de baza robotului, adică ${}^{R}T_M$.

Dacă aplicăm concluziile din relaţia 2.11, obţinem:

$$\underline{{}^{R}T_P} = \underline{{}^{R}T_M} \cdot \underline{{}^{M}T_P} \tag{2.12}$$

Considerând un robot industrial cu 6 grade de mobilitate, care are un efector final montat pe flanşa ultimului element (poate fi un dispozitiv de prehensiune sau o sculă), sistemele de referinţă ataşate fiecărui element al robotului, notate cu 1,2,..6 şi punctul caracteristic al robotului pe efectorul final, notat cu EF, avem:

$$\underline{{}^{R}T_{EF}} = \underline{{}^{R}T_1} \cdot \underline{{}^{1}T_2} \cdot \underline{{}^{2}T_3} \cdot \underline{{}^{3}T_4} \cdot \underline{{}^{4}T_5} \cdot \underline{{}^{5}T_6} \cdot \underline{{}^{6}T_{EF}} \tag{2.13}$$

Pentru ca robotul să acţioneze asupra piesei, pe piesă se identifică un punct esenţial realizării aplicaţiei, de exemplu centrul de masă al piesei pentru aplicaţia de manipulare a acesteia.

Fie punctul C centrul de masă al piesei, definit faţă de sistemul de referinţă ataşat piesei, ${}^{P}r_C$. Faţă de baza robotului, centrul de masă al corpului are vectorul de poziţie ${}^{R}r_C$, calculat cu:

$$\overline{{}^{R}r_C} = \underline{{}^{R}T_P} \cdot \overline{{}^{P}r_C} = \underline{{}^{R}T_M} \cdot \underline{{}^{M}T_P} \cdot \overline{{}^{P}r_C} \tag{2.14}$$

Pentru ca robotul să manipuleze piesa, punctul caracteristic al robotului trebuie să ajungă în centrul de masă al piesei, adică:

$$\overline{{}^{R}r_C} = \underline{{}^{R}T_{EF}} \cdot \overline{{}^{EF}r_C} = \underline{{}^{R}T_1} \cdot \underline{{}^{1}T_2} \cdot \underline{{}^{2}T_3} \cdot \underline{{}^{3}T_4} \cdot \underline{{}^{4}T_5} \cdot \underline{{}^{5}T_6} \cdot \underline{{}^{6}T_{EF}} \cdot \overline{{}^{EF}r_C} \tag{2.15}$$

Din relaţiile 2.14 şi 2.15, dacă robotul îşi aduce punctul caracteristic în centrul de masă C al piesei, avem:

$$\underline{{}^{R}T_M} \cdot \underline{{}^{M}T_P} \cdot \overline{{}^{P}r_C} = \underline{{}^{R}T_1} \cdot \underline{{}^{1}T_2} \cdot \underline{{}^{2}T_3} \cdot \underline{{}^{3}T_4} \cdot \underline{{}^{4}T_5} \cdot \underline{{}^{5}T_6} \cdot \underline{{}^{6}T_{EF}} \cdot \overline{{}^{EF}r_C} = \underline{{}^{R}T_{EF}} \cdot \overline{{}^{EF}r_C} \tag{2.16}$$

Matricea $\underline{{}^{6}T_{EF}}$ este cunoscută din montajul efectorului final pe flanşa robotului, vectorii ${}^{P}r_C$ şi ${}^{EF}r_C$ sunt cunoscuţi din fişierul CAD, respectiv din modalitatea de prehensare de către robot a piesei, iar ${}^{R}T_{EF}$ este o matrice care depinde de configuraţia cuplelor cinematice conducătoare ale robotului şi de construcţia propriu-zisă a dispozitivului de ghidare a acestuia. În procesul programării pe calculator (off-line) a robotului, această matrice (${}^{R}T_{EF}$) poate fi calculată şi se determină deplasările din fiecare cuplă prin problema cinematică inversă.

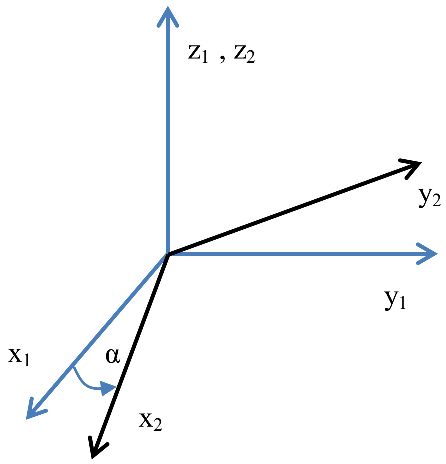
În procesul programării directe a robotului (on-line), programatorul deplasează manual robotului în poziţia necesară, se memorează acea configuraţie a braţului robotului, apoi această poziţie este utilizată în program, după necesităţi.

2.3 Calculul matricilor de rotaţie/translaţie elementare

În mecanica corpurilor, ramura cinematicii, s-a studiat mişcarea unui corp în general. Poziţia unui corp în spaţiu este definită faţă de un sistem de referinţă fix prin coordonatele x,y,z ale polului corpului (punctul faţă de care corpul se roteşte) şi cele trei unghiuri lui Euler (unghiul de precesie ψ, unghiul de rotaţie proprie φ, unghiul de nutaţie θ). Pentru a studia situarea elementelor robotului, acest caz general se reduce la matrici de rotaţie/translaţie elementare.

Rotaţia în jurul lui Oz

Fie două sisteme de referinţă notate cu $O_1x_1y_1z_1$ şi $O_2x_2y_2z_2$, reprezentate în figura alăturată. Sistemul $O_2x_2y_2z_2$ este rotit faţă de $O_1x_1y_1z_1$ în jurul axei O_1z_1 cu unghiul α.

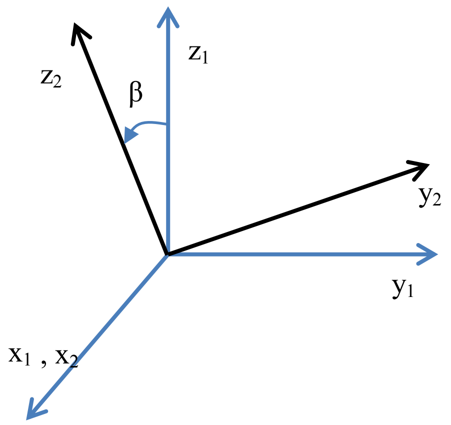


Submatricea de orientare a matricii de trecere din sistemul 2 în sistemul 1, ${}^1R_2$ este:

$$\underline{{}^1R_2} = \begin{bmatrix} \cos(x_1,x_2) & \cos(x_1,y_2) & \cos(x_1,z_2) \\ \cos(y_1,x_2) & \cos(y_1,y_2) & \cos(y_1,z_2) \\ \cos(z_1,x_2) & \cos(z_1,y_2) & \cos(z_1,z_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \cos(90° + \alpha) & \cos(90°) \\ \cos(270° + \alpha) & \cos(\alpha) & \cos(90°) \\ \cos(90°) & \cos(90°) & \cos(0°) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\alpha & -sin\alpha & 0 \\ sin\alpha & cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (2.17)^4$$

Rotaţia în jurul lui Ox

Fie două sisteme de referinţă notate cu $O_1x_1y_1z_1$ şi $O_2x_2y_2z_2$, reprezentate în figura alăturată. Sistemul $O_2x_2y_2z_2$ este rotit faţă de $O_1x_1y_1z_1$ în jurul axei O_1x_1 cu unghiul β.



Submatricea de orientare a matricii de trecere din sistemul 2 în 1, ${}^1R_2$ este:

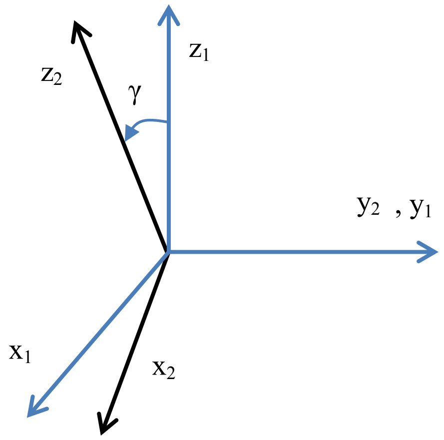
$$\underline{{}^1R_2} = \begin{bmatrix} \cos(x_1,x_2) & \cos(x_1,y_2) & \cos(x_1,z_2) \\ \cos(y_1,x_2) & \cos(y_1,y_2) & \cos(y_1,z_2) \\ \cos(z_1,x_2) & \cos(z_1,y_2) & \cos(z_1,z_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(0°) & \cos(90°) & \cos(90°) \\ \cos(90°) & \cos(\beta) & \cos(90° + \beta) \\ \cos(90°) & \cos(270° + \beta) & \cos(\beta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\beta & -sin\beta \\ 0 & sin\beta & cos\beta \end{bmatrix} \qquad (2.18)$$

Rotaţia în jurul lui Oy

Submatricea de orientare a matricii de trecere din sistemul 2 în 1, ${}^1R_2$ este:

$$\underline{{}^1R_2} =$$

[4] cos(90°+α)=cos90°cosα-sin90°sinα=0*cosα-1*sinα=-sinα;
cos(270°+α)=cos270°cosα-sin270°sinα=0*cosα-(-1)*sinα=sinα;

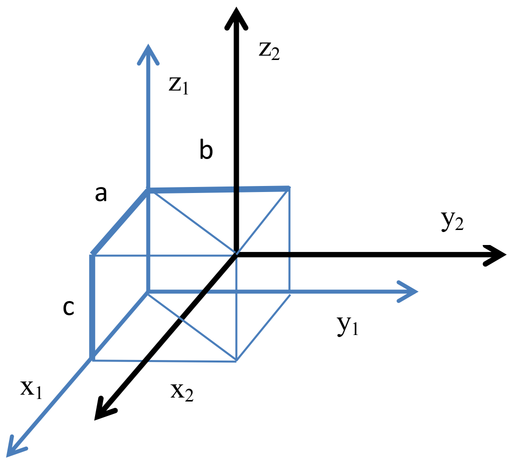


$$= \begin{bmatrix} \cos(x_1,x_2) & \cos(x_1,y_2) & \cos(x_1,z_2) \\ \cos(y_1,x_2) & \cos(y_1,y_2) & \cos(y_1,z_2) \\ \cos(z_1,x_2) & \cos(z_1,y_2) & \cos(z_1,z_2) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \cos(\gamma) & \cos(90°) & \cos(270° + \gamma) \\ \cos(90°) & \cos(0°) & \cos(90°) \\ \cos(90° + \gamma) & \cos(90°) & \cos(\gamma) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} cos\gamma & 0 & sin\gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ -sin\gamma & 0 & cos\gamma \end{bmatrix} \qquad (5.19)$$

Translaţii faţă de O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1



Matricea de trecere din sistemul 2 în 1 $^1T_2$, sistem translatat faţă de O_1x_1 cu a , faţă de O_1y_1 cu b, faţă de O_1z_1 cu c, este:

$$Tr(a,b,c) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (1.20)$$

2.4. Analiza cinematico-poziţională a mecanismului generator de traiectorie a robotului RTT[5]

Fie un lanţ cinematic deschis al unui robot serial industrial (figura 4.5) format, de la bază, din cuplă de rotaţie R cu axă verticală (se mai numeşte pivotare de bază), translaţie pe verticală T şi ultima cuplă de translaţie T, a cărei axă este perpendiculară în spaţiu pe cupla anterioară.

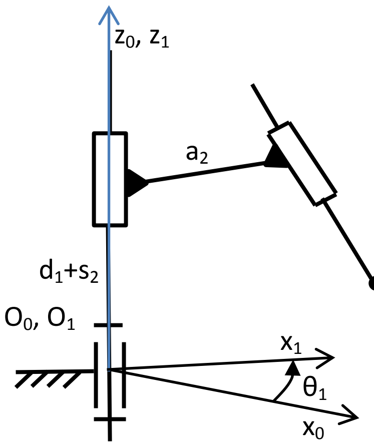
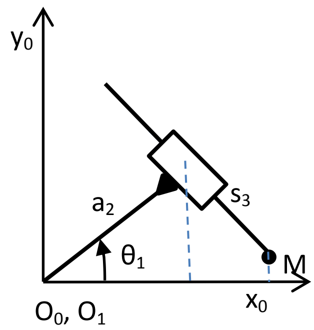
Analiza cinematică presupune determinarea:

- spaţiului de lucru al robotului (ca formă şi dimensiuni),
- coordonatelor carteziene ale punctului caracteristic faţă de un sistem de referinţă fix,
- determinarea vitezelor şi acceleraţiilor punctului caracteristic, prin derivarea relaţiilor de determinare a poziţiilor în raport cu timpul,

toţi aceşti parametrii cinematici sunt calculaţi în funcţie de:

[5] RTT este structura unui robot în coordinate cilindrice. Denumirea “cilindrice” provine de la forma exterioară cilindrică a spaţiului de lucru.

- parametrii dimensionali ai sistemului mecanic al robotului (lungimile elementelor),
- cursele elementelor din cuplele cinematice,
- poziţiile posibile ale elementelor lanţului cinematic, care se mai denumesc coordonate generalizate din cuple.

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td rowspan="2">$x_M = a_2 \cdot cos\theta_1 + s_3 \cdot sin\theta_1$

$y_M = a_2 \cdot sin\theta_1 - s_3 \cdot cos\theta_1$

$z_M = d_1 + s_2$ (2.21)
unde θ_1, s_2, s_3 sunt parametrii de mişcare[6] din cuplele cinematice conducătoare

Ecuaţii de calcul a coordonatelor punctului caractersitic M în raport cu $O_0x_0y_0z_0$</td>
</tr>
<tr>
<td>Schema cinematică 3D</td>
<td>Vedere de sus</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">Figura 2.5. Schema cinematică a robotului în coordonate cilindrice</td>
</tr>
</table>

Parametrii Denavit Hartenberg[7]

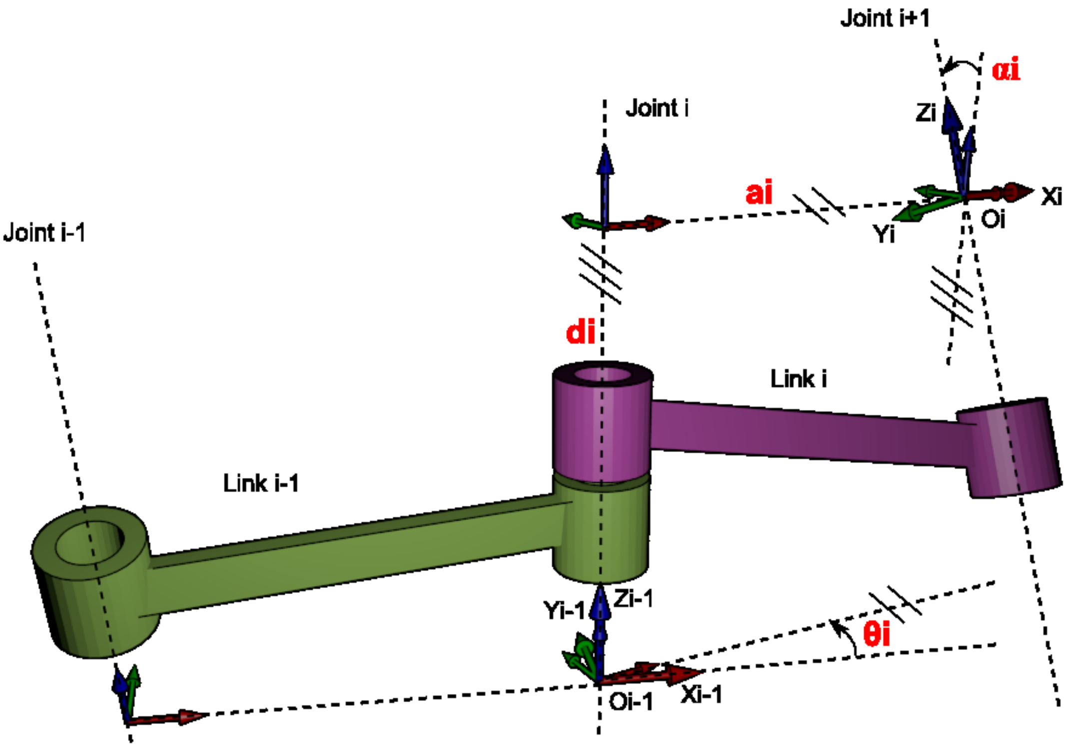
Cei patru parametrii DH, notaţi cu roşu în figura 2.6, sunt: θ_i, d_i, a_i, α_i. Cu ajutorul acestor parametrii se poate face transformarea de coordonate din sistemul $O_{i-1}X_{i-1}Y_{i-1}Z_{i-1}$ în $O_iX_iY_iZ_i$.

În fiecare cuplă cinematică conducătoare i se ataşează un sistem de referinţă astfel:

- Axa Z pe direcţia de rotaţie/translaţie a cuplei cinematice;
- Axa X este paralelă cu normala comună între cele două axe O_{i-1} Z_{i-1} şi O_i Z_i astfel încât $X_i=Z_i \times Z_{i-1}$. Dacă axele Z sunt paralele, d_i este un parametru liber;
- Axa Y se determină astfel încât OXYZ să fie un sistem de coordonate drept.

[6] Parametrii de mişcare din cuplele cinematice conducătoare ale robotului pot fi de rotaţie (notaţi cu ψ sau θ) sau de translaţie (notaţi cu s). În general, indiferent de tipul cuplei cinematice, aceştia se numesc parametrii generalizaţi de mişcare (notaţi cu q) sau coordonate generalizate.

[7] Notaţia Denavit Hartenberg, a fost concepută în 1955 pentru cinematica mecanismelor spaţiale.



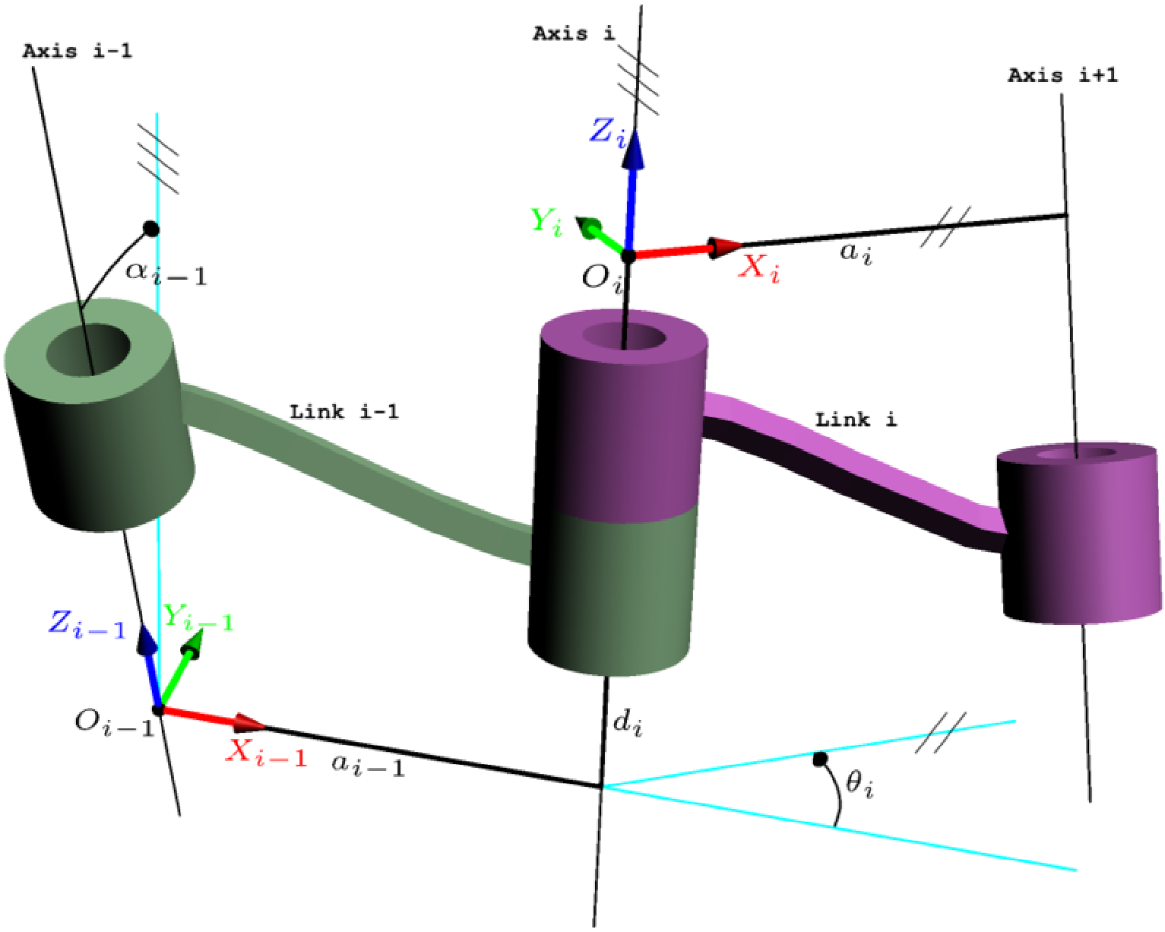


Figura 2.6. Exemple de parametrii DH pentru 3 cuple cinematice de rotaţie în plan şi spaţiu [23]

Se reia schema cinematică a robotului RTT. În fiecare cuplă cinematică conducătoare se ataşează câte un sistem de referinţă, după convenţia Denavit-Hartenberg.

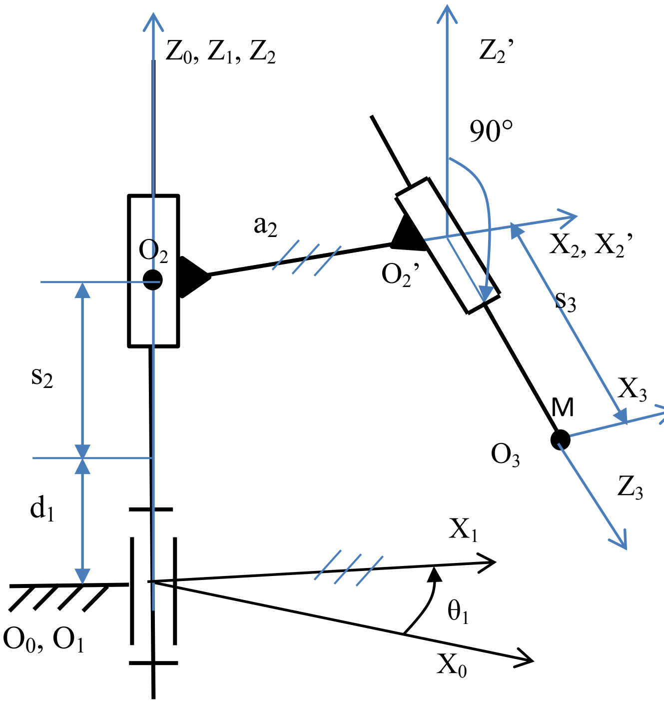


Figura 2.7. Schema cinematică a robotului RTT şi sistemele de referinţă definite conform convenţiei Denavit-Hartenberg

Din sistemul de referinţă $O_0X_0Y_0Z_0$ în sistemul $O_1X_1Y_1Z_1$ se ajunge prin rotaţie cu unghiul θ_1 în jurul lui O_0Z_0.

Din $O_1X_1Y_1Z_1$ în $O_2X_2Y_2Z_2$ se ajunge prin translaţie cu d_1+s_2 (s_2 este cursa momentană a actuatorului liniar, d_1 este corespunzătoare poziţiei lui O_2, când $s_2=0$, limita inferioară de cursă s_2).

Din $O_2X_2Y_2Z_2$ în $O_{2'}X_{2'}Y_{2'}Z_{2'}$ se ajunge prin translaţie pe direcţia perpendicularei comune între axele Z ale celor două cuple de translaţie, cu mărimea a_2, care este şi lungimea elementului 2 a schemei cinematice. Axa O_3Z_3 ajunge de-a lungul axei de translaţie a cuplei 3 prin rotaţie cu 90° în jurul axei $O_{2'}X_{2'}$.

Din $O_{2'}X_{2'}Y_{2'}Z_{2'}$ în $O_3X_3Y_3Z_3$ se ajunge prin translaţie cu s_3. Se utilizează notaţii R şi T pentru trecerea dintr-un sistem în altul, în paranteză se trece axa faţă de care se realizează mişcarea şi valoarea acestei mişcări.

$$^0T_3=R(Z,\theta_1)T(Z,d_1+s_2)T(X,a_2)R(X,90°)T(Z,s_3) \qquad (2.22)$$

$$\underline{^0T_3} = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1+s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{90°} & -s_{90°} & 0 \\ 0 & s_{90°} & c_{90°} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & s_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1+s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & s_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

unde $c_1=\cos\theta_1$; $s_1=\sin\theta_1$, $c_{90^\circ}=\cos 90^\circ$; $s_{90^\circ}=\sin 90^\circ$; θ_1, s_2 şi s_3 sunt parametrii cinematici din cuplele RTT.

$$\begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1+s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & a_2\cdot c_1 \\ s_1 & c_1 & 0 & a_2\cdot s_1 \\ 0 & 0 & 1 & d_1+s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & s_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -s_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{{}^0T_3} = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & a_2\cdot c_1 \\ s_1 & c_1 & 0 & a_2\cdot s_1 \\ 0 & 0 & 1 & d_1+s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -s_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

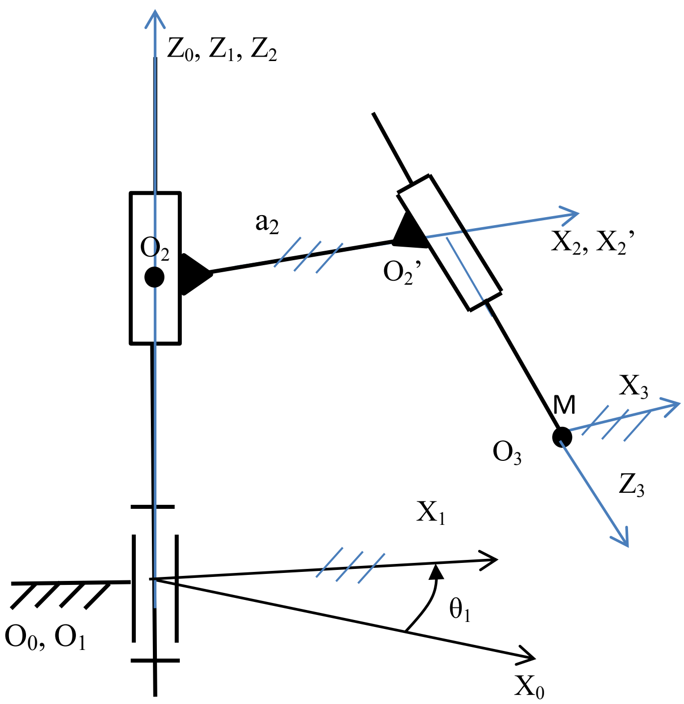
$$\begin{bmatrix} c_1 & 0 & s_1 & a_2\cdot cos\theta_1 + s_3 sin\theta_1 \\ s_1 & 0 & -c_1 & a_2\cdot sin\theta_1 - s_3 cos\theta_1 \\ 0 & 1 & 0 & d_1+s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.24}$$

Submatricea de poziţionare din relaţia 2.24 are elementele identice cu relaţiile 2.22, adică coordonatele punctului caracteristic M în raport cu sistemul $O_0X_0Y_0Z_0$.

Submatricea de rotaţie R din relaţia 2.24 este:

$$\begin{bmatrix} cos\theta_1 & 0 & sin\theta_1 \\ sin\theta_1 & 0 & -cos\theta_1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(X_0,X_3) & \cos(X_0,Y_3) & \cos(X_0,Z_3) \\ \cos(Y_0,X_3) & \cos(Y_0,Y_3) & \cos(Y_0,Z_3) \\ \cos(Z_0,X_3) & \cos(Z_0,Y_3) & \cos(Z_0,Z_3) \end{bmatrix}$$

Din figura 2.8 e observă că O_3X_3 este paralelă cu O_1X_1, în concluzie unghiul $(X_0, X_3)=\theta_1$. Unghiul (Y_0, X_3)=unghiul $(Y_0, X_1)=270^\circ+\theta_1$.



O_3Z_3 este perpendiculară pe O_3X_3 (pe O_1X_1, în sensul negativ al axei O_1Y_1). Unghiul (X_0, Z_3)=unghiul $(X_0, Y_1)=270+\theta_1$. Unghiul (Y_0, Z_3)=unghiul $(180^\circ+\theta_1)$.

Figura 2.8. Sistemele de referinţă $O_3X_3Y_3Z_3$ şi $O_0X_0Y_0Z_0$ pentru robotul RTT

O_3Y_3 are direcţia verticală (e perpendiculară pe planul determinat de O_3X_3 şi O_3Y_3), e perpendiculară pe planul $O_0X_0Y_0$ (acelaşi cu planul $O_1X_1Y_1$), unghiul (X_0, Y_3)=unghiul (Y_0, Y_3)=unghiul (Z_0, X_3)=unghiul (Z_0, Z_3)=90°, iar unghiul (Z_0, Y_3)=0°.

2.5. Analiza cinematico-poziţională a dispozitivului de ghidare a robotului RRRR

Acestui robot antropomorf[8] (are ca mecanism generator de traiectorie lanţul cinematic deschis RRR şi ca mecanism de orientare o cuplă R) i se determină relaţiile de calcul a coordonatelor punctului caracteristic M al robotului sau, prin aplicarea convenţiei Denavit-Hartenberg, matricea de trecere ${}^0T_4$. Figura 2.9 reprezintă schema cinematică a robotului RRRR în vedere din faţă şi dedesubt în vedere de sus.

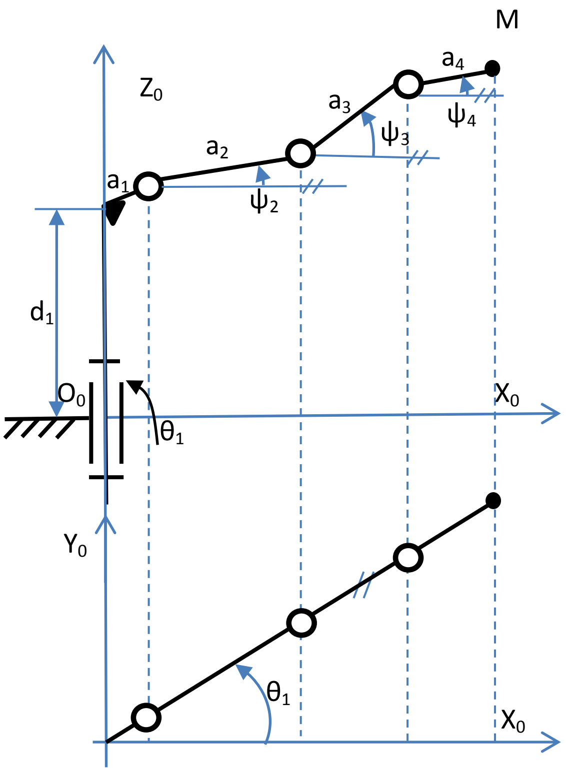


Figura 2.9. Schema cinematică a robotului RRRR (în vedere din faţă şi de sus)

Acestei scheme i s-a ataşat un sistem de referinţă fix, cu originea în centrul bazei, $O_0X_0Y_0Z_0$. În robotică, acest sistem de referinţă se numeşte sistem ataşat bazei robotului (World Coordinates, Robot Base)[9].

Unghiurile ψ_2, ψ_3, ψ_4 sunt unghiurile de rotaţie din cuplele cinematice conducătoare, măsurate faţă de axele sistemului de referinţă fix $O_0X_0Y_0Z_0$. Aceste unghiuri se mai numesc şi unghiuri absolute. În cazul în care unghiurile se raportează la elementul anterior, unghiurile sunt relative şi se notează cu θ_i.

Se calculează coordonatele punctului caracteristic al robotului:

$$X_M = (a_1 + a_2 \cdot cos\psi_2 + a_3 \cdot cos\psi_3 + a_4 \cdot cos\psi_4) \cdot cos\theta_1$$

$$Y_M = (a_1 + a_2 \cdot cos\psi_2 + a_3 \cdot cos\psi_3 + a_4 \cdot cos\psi_4) \cdot sin\theta_1$$

$$Z_M = d_1 + a_2 \cdot sin\psi_2 + a_3 \cdot sin\psi_3 + a_4 \cdot sin\psi_4$$

(2.25)

Dacă se aplică convenţia Denavit-Hartenberg (figura 2.10) şi se obţine relaţia de calcul a matricii de trecere ${}^0T_4$, pe baza relaţiilor de trecere dintr-un sistem de referinţă ataşat unei cuple în următoarea cuplă pe lanţul cinematic:

[8] **ANTROPOMÓRF, -Ă,** *antropomorfi,* -e, adj. Care seamănă cu omul, care aminteşte de om.
[9] Sistemul de referinţă ataşat bazei robotului are originea în centrul flanşei de montare a robotului pe sol, iar orientarea acestui sistem depinde de firma producătoare a robotului (poate fi diferită la firme producătoare diferite).

$^{0}T_4$=R(Z, θ_1)T(Z, d_1)T(X,a_1)R(X, 90°)R(Z, θ_2)T(X, a_2) R(Z, θ_3)T(X, a_3) R(Z, θ_4)T(X, a_4) (2.26)

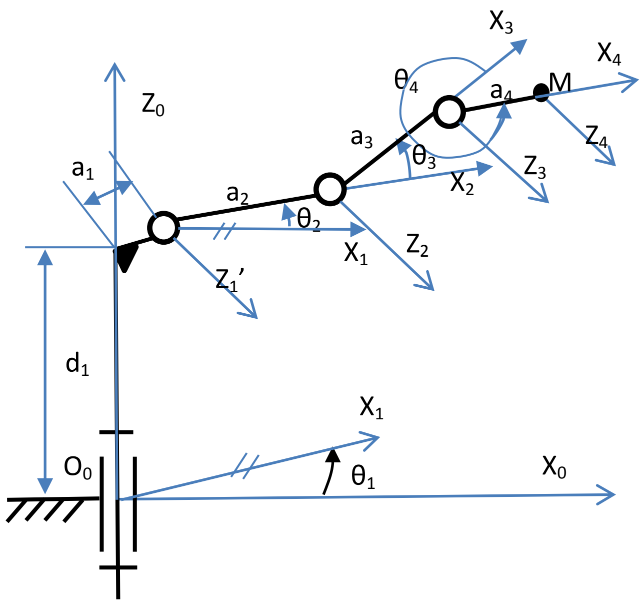


Figura 2.10. Schema cinematică a robotului RRRR, cu sistemele de referinţă ataşate în cele patru cuple

În figura 2.10, O_2Z_2, O_3Z_3, O_4Z_4 sunt axe perpendiculare pe planul $O_0X_0Z_0$.

$$\underline{^{0}T_4} = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{90^\circ} & -s_{90^\circ} & 0 \\ 0 & s_{90^\circ} & c_{90^\circ} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & 0 \\ s_3 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot$$

$$\begin{bmatrix} c_4 & -s_4 & 0 & 0 \\ s_4 & c_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (2.27)$$

Matricile R(Z, θ_4)T(X, a_4) , i=2,3,4 sunt de forma:

$$\begin{bmatrix} c_4 & -s_4 & 0 & 0 \\ s_4 & c_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_4 & -s_4 & 0 & a_4c_4 \\ s_4 & c_4 & 0 & a_4s_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matricile R(Z, θ_i)T(X, a_i) R(Z, θ_j)T(X, a_j), i=3, j=4, sunt de forma:

$$\begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & a_3c_3 \\ s_3 & c_3 & 0 & a_3s_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_4 & -s_4 & 0 & a_4c_4 \\ s_4 & c_4 & 0 & a_4s_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} c_3c_4 - s_3s_4 & -c_3s_4 - s_3c_4 & 0 & a_4c_3c_4 - a_4s_3s_4 + a_3c_3 \\ s_3c_4 + c_3s_4 & c_3c_4 - s_3s_4 & 0 & a_4s_3c_4 + a_4c_3s_4 + a_3s_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} c_{34} & -s_{34} & 0 & a_4c_{34} + a_3c_3 \\ s_{34} & c_{34} & 0 & a_4s_{34} + a_3s_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.28)$$ [10]

Primele 4 matrici înmulţite din ${}^4T_0$, adică R(Z, θ_1)T(Z, d_1)T(X,a_1)R(X, 90°), sunt:

$$\begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & a_1c_1 \\ s_1 & c_1 & 0 & a_1s_1 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & s_1 & a_1c_1 \\ s_1 & 0 & -c_1 & a_1s_1 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

Ultimele 6 matrici înmulţite, adică R(Z, θ_2)T(X, a_2) R(Z, θ_3)T(X, a_3) R(Z, θ_4)T(X, a_4) sunt:

$$\begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & a_2c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & a_2s_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_{34} & -s_{34} & 0 & a_4c_{34} + a_3c_3 \\ s_{34} & c_{34} & 0 & a_4s_{34} + a_3s_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} c_{34}c_2 - s_2s_{34} & -s_{34}c_2 - s_2c_{34} & 0 & (a_4c_{34} + a_3c_3)c_2 - s_2(a_4s_{34} + a_3s_3) + a_2c_2 \\ s_2c_{34} + c_2s_{34} & -s_{34}s_2 + c_2c_{34} & 0 & (a_4c_{34} + a_3c_3)s_2 + c_2(a_4s_{34} + a_3s_3) + a_2s_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} c_{234} & -s_{234} & 0 & a_2c_2 + a_3c_{23} + a_4c_{234} \\ s_{234} & c_{234} & 0 & a_2s_2 + a_3s_{23} + a_4s_{234} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

Din relaţiile 2.29 şi 2.30, se obţine forma finală a matricii ${}^0T_4$:

$$\begin{bmatrix} c_1 & 0 & s_1 & a_1c_1 \\ s_1 & 0 & -c_1 & a_1s_1 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_{234} & -s_{234} & 0 & a_2c_2 + a_3c_{23} + a_4c_{234} \\ s_{234} & c_{234} & 0 & a_2s_2 + a_3s_{23} + a_4s_{234} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} c_{234}c_1 & -s_{234}c_1 & s_1 & (a_1 + a_2c_2 + a_3c_{23} + a_4c_{234})c_1 \\ c_{234}s_1 & -s_{234}s_1 & -c_1 & (a_1 + a_2c_2 + a_3c_{23} + a_4c_{234})s_1 \\ s_{234} & c_{234} & 0 & d_1 + a_2s_2 + a_3s_{23} + a_4s_{234} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

---

[10] $\cos(\theta_3 + \theta_4) = cos\theta_3 \cdot cos\theta_4 - sin\theta_3 \cdot sin\theta_4$; $\sin(\theta_3 + \theta_4) = sin\theta_3 \cdot cos\theta_4 + cos\theta_3 \cdot sin\theta_4$, relaţii cunoscute din trigonometrie.
Notaţii utilizate $c_1=\cos\theta_1$; $s_1=\sin\theta_1$; $c_{23}=\cos(\theta_2+\theta_3)$; $s_{23}=\sin(\theta_2+\theta_3)$.

Submatricea de poziţionare din relaţia 2.31 este formată de coordonatele punctului M în raport cu $O_0X_0Y_0Z_0$. Comparând aceste ecuaţii cu relaţiile 2.25, avem:

$$X_M = (a_1 + a_2 \cdot cos\psi_2 + a_3 \cdot cos\psi_3 + a_4 \cdot cos\psi_4) \cdot cos\theta_1$$

$$X_M = (a_1 + a_2c_2 + a_3c_{23} + a_4c_{234})c_1$$

Sau fără notaţiile prescurtate, avem:

$$X_M = (a_1 + a_2cos\theta_2 + a_3\cos(\theta_2 + \theta_3) + a_4\cos(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4))\cos\theta_1$$

$$Y_M = (a_1 + a_2 \cdot cos\psi_2 + a_3 \cdot cos\psi_3 + a_4 \cdot cos\psi_4) \cdot sin\theta_1$$

$$Y_M = (a_1 + a_2c_2 + a_3c_{23} + a_4c_{234})s_1;\ \text{sau}$$

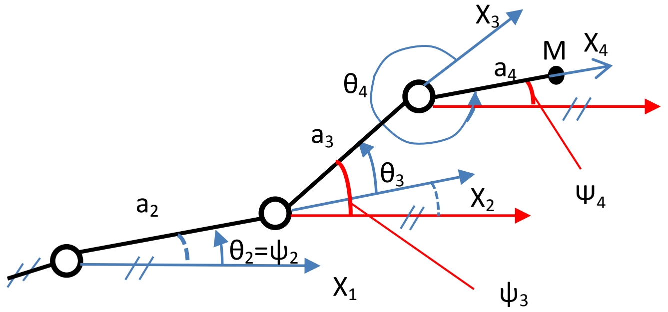
$$Y_M = (a_1 + a_2cos\theta_2 + a_3\cos(\theta_2 + \theta_3) + a_4\cos(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4))\sin\theta_1$$

$$Z_M = d_1 + a_2 \cdot sin\psi_2 + a_3 \cdot sin\psi_3 + a_4 \cdot sin\psi_4$$

$$Z_M = d_1 + a_2s_2 + a_3s_{23} + a_4s_{234};\ \text{sau}$$

$$Z_M = d_1 + a_2sin\theta_2 + a_3\sin(\theta_2 + \theta_3) + a_4\sin(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) \quad (2.32)$$

Cele câte două relaţii pentru coordonatele punctului M sunt echivalente, dacă $\psi_2=\theta_2$; $\psi_3=\theta_2+\theta_3$; $\psi_4=\theta_2+\theta_3+\theta_4$. Egalităţile între unghiuri sunt evidente, corelaţiile între acestea sunt reprezentate în figura 2.11.



$$\psi_3 = \theta_3 + \theta_2$$

$$\psi_3 + \theta_4 - \psi_4 = 360°$$

$$\theta_3 + \theta_2 + (\theta_4 - \psi_4) = 360°$$

Figura 2.11. Detaliu al figurii 2.10 pentru determinarea relaţiilor între unghiurile absolute (ψ) şi cele relative (θ).

$$\cos(\theta_3 + \theta_2 + \theta_4) = \cos(360° + \psi_4) \quad (2.33)$$

Problema cinematico-poziţională directă a robotului

Pentru o anumită structură a robotului, dimensiuni ale lungimilor cuplelor cinematice, ale offset-urilor şi valori ale deplasărilor în cuplele cinematice conducătoare, se calculează coordonatele carteziene ale punctului caracteristic al robotului.

De exemplu, pentru robotului RTT, în relaţiile de calcul 2.24 se cunosc parametrii dimensionali a_2 şi d_1, deplasările din cuple ψ_1 (θ_1), s_2 şi s_3. Se calculează X_M, Y_M, Z_M. Dacă se aplică convenţia Denavit-Hartenberg, din matricea ${}^0T_3$ adică submatricea de orientare, se determină şi cosinuşii directori ai axelor sistemului de referinţă fix, notat cu 0 cu cei ai sistemului din punctul caracteristic M, notat cu 3. Rezolvarea problemei cinematice directe este simplă.

2.6. Problema cinematico-poziţională inversă a robotului

Problema inversă poziţională a robotului serial este mai dificilă decât problema directă.

Datele de intrare ale problemei inverse sunt: structura robotului, parametrii dimensionali ai sistemului mecanic al robotului (sau parametrii Denavit-Hartenberg θ_i, d_i, a_i, α_i), coordonatele carteziene ale punctului caracteristic M al robotului.

Datele de ieşire ale problemei inverse sunt valorile coordonatelor generalizate ale cuplelor q_i.

Exemplul 1: robotul RRRR

Nu există o metodă universală de rezolvare a problemei cinematico-poziţionale inverse. Fiecare structură de robot trebuie tratată ca problemă dată spre rezolvare. În unele cazuri există mai multe metode de rezolvare a aceleiaşi probleme.

Fie robotul RRRR a cărui matrice de transformare ${}^0T_4$, obţinută în paragraful 2.5, relaţia 2.31 este:

$$\underline{{}^0T_4} = \begin{bmatrix} c_{234}c_1 & -s_{234}c_1 & s_1 & (a_1+a_2c_2+a_3c_{23}+a_4c_{234})c_1 \\ c_{234}s_1 & -s_{234}s_1 & -c_1 & (a_1+a_2c_2+a_3c_{23}+a_4c_{234})s_1 \\ s_{234} & c_{234} & 0 & d_1+a_2s_2+a_3s_{23}+a_4s_{234} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X_M = (a_1 + a_2 \cdot cos\psi_2 + a_3 \cdot cos\psi_3 + a_4 \cdot cos\psi_4) \cdot cos\theta_1 \qquad (2.34)$$

$$Y_M = (a_1 + a_2 \cdot cos\psi_2 + a_3 \cdot cos\psi_3 + a_4 \cdot cos\psi_4) \cdot sin\theta_1 \qquad (2.35)$$

$$Z_M = d_1 + a_2 \cdot sin\psi_2 + a_3 \cdot sin\psi_3 + a_4 \cdot sin\psi_4 \qquad (2.36)$$

Dându-se valorile lui X_M, Y_M, Z_M, a_1, d_1, a_2, a_3, a_4 şi valoarea lui ψ_4 (a patra cuplă R modifică cu preponderenţă orientarea efectorului final), se calculează valorile lui θ_1, ψ_2, ψ_3.

Se observă că împărţind relaţiile 2.35 la 2.34, se obţine:

$$\theta_1 = \mathrm{atan}(\frac{Y_M}{X_M}) \qquad (2.37)$$

Ridicarea la pătrat a relaţiilor 2.34 şi 2.35 şi suma lor conduce la relaţia:

$$(a_1 + a_2 \cdot cos\psi_2 + a_3 \cdot cos\psi_3 + a_4 \cdot cos\psi_4) = \sqrt{(X_M^2 + Y_M^2)} \qquad (2.38)$$

Adică, $a_2 \cdot cos\psi_2 + a_3 \cdot cos\psi_3 = -a_1 - a_4 \cdot cos\psi_4 + \sqrt{(X_M^2 + Y_M^2)} = A$ (2.39)

Din ecuaţia 2.36, separând termenii conţinând pe ψ_2, ψ_3, obţinem:

$$a_2 \cdot sin\psi_2 + a_3 \cdot sin\psi_3 = Z_M - d_1 - a_4 \cdot sin\psi_4 = B \qquad (2.40)$$

Unde A şi B sunt valori cunoscute reale.

Dar, din 2.39 avem: $cos\psi_3 = \frac{A-a_2 \cdot cos\psi_2}{a_3}$; din 2.40, avem $sin\psi_3 = \frac{B-a_2 \cdot sin\psi_2}{a_3}$.

(2.41)

Ridicând la pătrat cele două relaţii şi adunându-le, avem:

$$\left(\frac{A-a_2 \cdot cos\psi_2}{a_3}\right)^2 + \left(\frac{B-a_2 \cdot sin\psi_2}{a_3}\right)^2 = 1 \qquad (2.41')$$ [11]

Dezvoltând ecuaţia în ψ_2 din 2.41, obţinem:

$$A \cdot cos\psi_2 + B \cdot \sin\psi_2 = (A^2 + B^2 + a_2^2 - a_3^2) \cdot \frac{1}{2 \cdot a_2} = C$$

Relaţia de mai sus este de forma: $A \cdot cos\psi_2 + B \cdot \sin\psi_2 = C$, (2.42)

unde A, B, C sunt constante reale.

Se constată că rezolvarea problemei cinematico-poziţionale inverse conduce la rezolvarea unei ecuaţii trigonometrice de forma dată în relaţia 2.42.

Metoda de rezolvare propusă a acestei ecuaţii este metoda substituţiei.

Se propune substituţia: A=r sinφ; B=r cosφ, unde $r = \mp\sqrt{A^2 + B^2}$; $\varphi = \text{atan}(\frac{A}{B})$

Înlocuind pe A şi B în 2.42, obţinem:

$$rsin\varphi \cdot cos\psi_2 + rcos\varphi \cdot \sin\psi_2 = C; \;\; \sin(\psi_2 + \varphi) = \frac{C}{r} \qquad (2.43)$$

Dar $\cos(\psi_2 + \varphi) = \mp\sqrt{1 - \left(\frac{C}{r}\right)^2}$; $tg(\psi_2 + \varphi) = \frac{\mp C}{\sqrt{r^2 - C^2}}$; $\psi_2 = \text{atan}\left(\frac{\mp C}{\sqrt{r^2 - C^2}}\right) - \varphi$ (2.44)

Discuţie: din ultima egalitate 2.43,

dacă C>0, atunci $0 < \sin(\psi_2 + \varphi) < 1$ şi $-\varphi < \psi_2 < \pi - \varphi$;

dacă C<0, atunci $-1 < \sin(\psi_2 + \varphi) < 0$ şi $-\pi - \varphi < \psi_2 < -\varphi$; (2.45)[12]

Din relaţiile 2.41, dacă se calculează ψ_2, se va calcula şi ψ_3, adică:

$$cos\psi_3 = \frac{A-a_2 \cdot cos\psi_2}{a_3} \text{ şi } sin\psi_3 = \frac{B-a_2 \cdot sin\psi_2}{a_3}; \; tg\psi_3 = \frac{B-a_2 \cdot sin\psi_2}{A-a_2 \cdot cos\psi_2 a_3} \qquad (2.46)$$

Exemplul 2: Robotul RRR [1]

Fie robotul din figura 2.12, un lanţ cinematic deschis plan. În figură s-au notat cu W punctul corespunzător cuplei de rotaţie 3, care se mai numeşte Wrist Point= punct de încheietură, aparţinând mecanismului de orientare; θ_1, θ_2, θ_3, unghiurile relative orientate din cuple, E

---

[11] Pentru că $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$

[12] Ca să existe α, trebuie ca $-1 \le \sin(\alpha) \le 1$. Pentru cadranul I şi II, $0 \le \sin\alpha \le 1$, deci $\pi \le \alpha \le 0$, pentru cadranul III şi IV, $0 \le \sin\alpha \le -1$, deci $\pi \le \alpha \le 2\pi$.

punctul caracteristic al robotului, φ_e este unghiul de orientare (Pitch), x_e, y_e sunt coordonatele punctului E faţă de sistemul de referinţă din figură.

Problema cinematică inversă presupune cunoscute lungimile elementelor l_1, l_2, l_3, coordonatele punctului E x_e, y_e şi unghiul de orientare absolută φ_e.

Să se calculeze unghiurile θ_1, θ_2, θ_3.

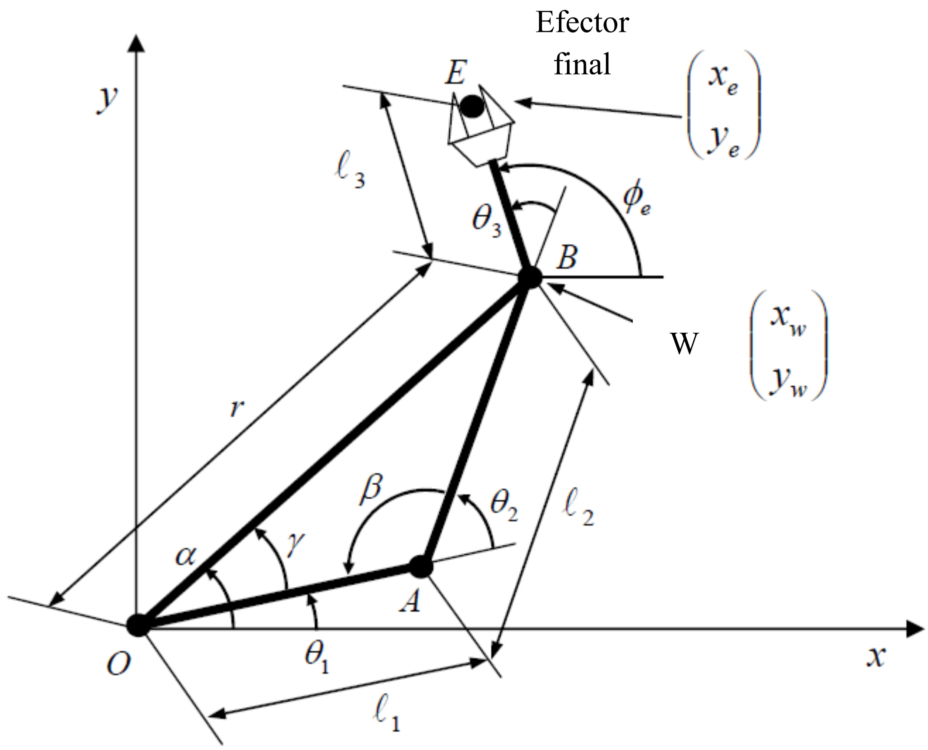


Figura 2.12. Schema cinematică a robotului RRR şi schiţa ajutătoare de calcul la problema cinematică inversă [1]

Calculele presupun parcurgerea a două etape.

Mai întâi se calculează poziţia punctului W din valorile x_e, y_e şi ϕ_e.

$$x_W = x_e - l_3 cos\emptyset_e;\ y_W = y_e - l_3 sin\emptyset_e \qquad (2.46)$$

Unghiul α (din figura 2.12) se calculează $\alpha = atan\frac{y_W}{x_W}$.

Se consideră triunghiul OAB şi se aplică teorema cosinusului în acest triunghi.

$$l_1^2 + l_2^2 - 2l_1 l_2 cos\beta = r^2 = x_W^2 + y_W^2$$

Din această relaţie se calculează valoarea unghiului β şi θ_2:

$$\theta_2 = \pi - \beta = \pi - acos\frac{l_1^2 + l_2^2 - x_W^2 - y_W^2}{2l_1 l_2} \qquad (2.47)$$

Similar, pentru unghiul γ din acelaşi triunghi OAB, avem:

$$l_1^2 + r^2 - 2l_1 r cos\gamma = l_2^2$$

$$\theta_1 = \alpha - \gamma = atan\frac{y_W}{x_W} - acos\frac{l_1^2 - l_2^2 + x_W^2 + y_W^2}{2l_1\sqrt{x_W^2 + y_W^2}} \quad (2.48)$$

$$\theta_3 = \emptyset_e - \theta_1 - \theta_2 \quad (2.49)$$

Ecuaţiile de calcul a unghiurilor θ_1, θ_2, θ_3 pot să aibă mai mult decât soluţii unice. De multe ori, coordonatele punctului caracteristic şi unghiurile de orientare nu oferă o soluţie unică pentru configuraţia braţului robotului. În figura 2.13 se prezintă două posibile configuraţii ale braţului robotului pentru aceleaşi valori x_e, y_e şi φ_e.

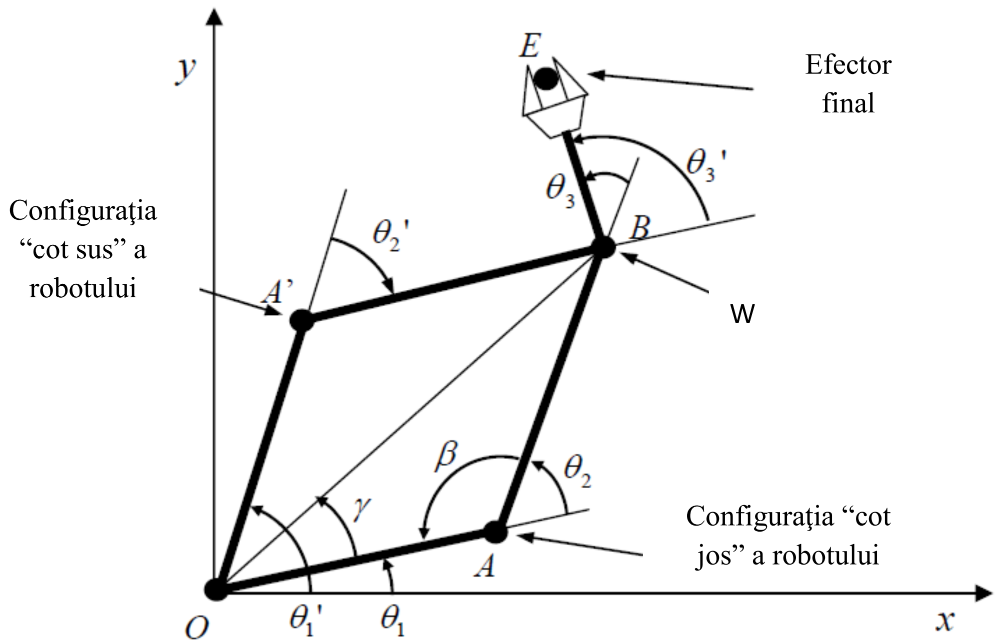


Figura 2.12. Consecinţa existenţei mai multor soluţii pentru ecuaţiile trigonometrice din problema cinematică inversă [1]

2.7 Analiza cinematică a mecanismului de orientare al robotului

Orientarea obiectului de lucru prehensat de către robot este realizată prin mişcări de rotaţie în jurul axelor unui sistem de referinţă ataşat punctului de intersecţie ale axelor 4, 5 şi 6 (notat cu W=wrist point). Axele comandate 4, 5, 6 ale unui robot cu 6 grade de mobilitate sunt denumite şi cuplele cinematice conducătoare aparţinând mecanismului de orientare.

În figura 2.13 sunt reprezentate mişcările de orientare ale efectorului final (obiectului de lucru prehensat sau sculei). Mişcarea de pronaţie-supinaţie (Roll) este rotaţia în jurul axei O_WZ_W, mişcarea de flexie-extensie (Pitch) este rotaţia în jurul axei O_WY_W, iar mişcarea de aducţie-abducţie (Yaw) este rotaţia în jurul axei O_WX_W.

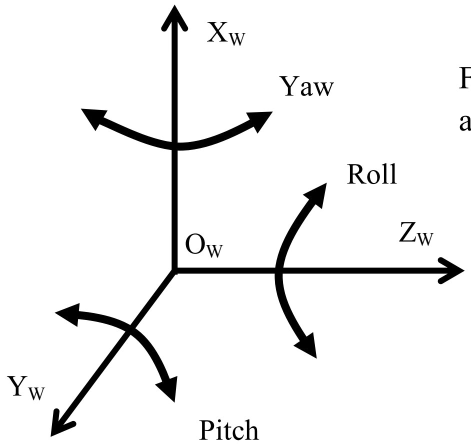
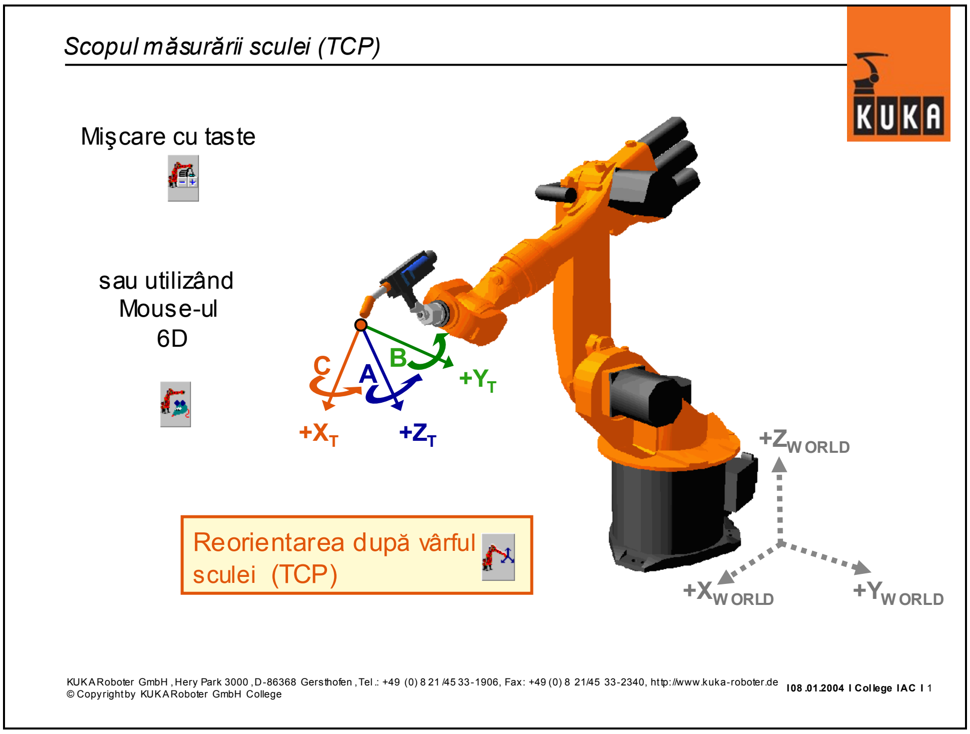
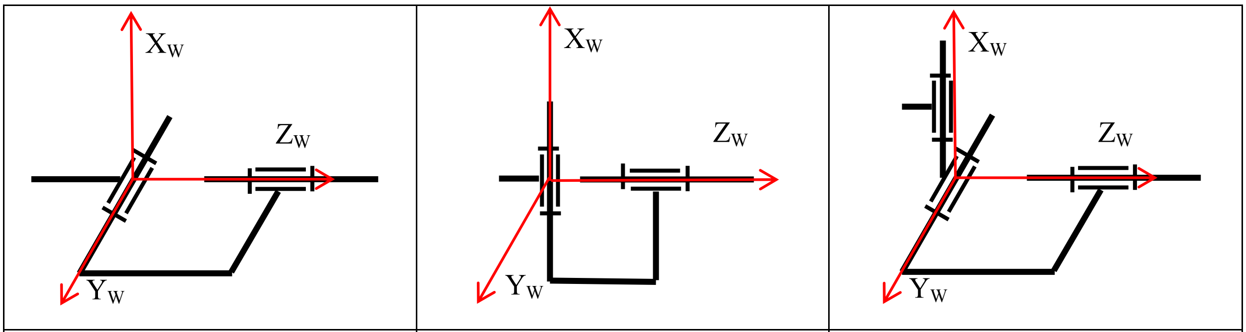


Figura 2.13. Mişcările de orientare şi denumirile acestora



În figura de mai sus sunt prezentate mişcările de rotaţie în jurul axelor sistemului de referinţă ataşat sculei (efectorului final) pentru robotul Kuka. Corespondenţa dintre cele două notaţii este: pronaţie-supinaţie corespunde mişcării C, flexie-extensie corespunde mişcării B, iar aducţie-abducţie corespunde mişcării A.

Cuplele cinematice conducătoare ale mecanismului de orientare al robotului serial sunt numai cuple de rotaţie. Mecanismul de orientare are, în funcţie de necesităţile din aplicaţiile robotului, 1, 2, sau 3 cuple cinematice de rotaţie. În figurile 2.14 sunt prezentate trei scheme cinematice ale mecanismului de orientare al robotului cu două/trei (RR) sau (RRR) cuple cinematice conducătoare.



PR	YR	YPR

Figura 2.14. Exemple de scheme cinematice ale mecanismului de orientare

În figura 2.15 este prezentată schema cinematică a mecanismului de orientare a robotului Kuka, ABB, etc.

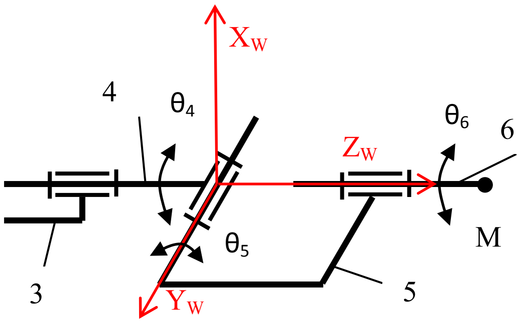


Figura 2.15. Schema cinematică a mecanismului de orientare RRR

Pentru analiza cinematică a mecanismului de orientare se determină matricea ${}^3T_6$, care are forma generală:

$$\underline{{}^3T_6}=\begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & {}^3x_{O_6} \\ n_y & o_y & a_y & {}^3y_{O_6} \\ n_z & o_z & a_z & {}^3z_{O_6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad (2.50)$$

unde n_x, o_x, a_x etc. sunt valorile cosinuşilor directori, valori numerice cuprinse în intervalul [-1,1].

Ipoteza simplificatoare în analiza cinematică a acestui mecanism de orientare este că acest mecanism este sferic. Centrul sferei determinate de mulţimea poziţiilor posibile ale punctului M coincide cu punctul încheieturii (O_W), originea sistemului de referinţă $O_WX_WY_WZ_W$. În consecinţă, ${}^3x_{O6}={}^3y_{O6}={}^3z_{O6}=0$. Din acest motiv, în loc de a se realiza calculele cinematice cu forma matricii de trecere completă, se va utiliza în cele ce urmează doar forma submatricilor de orientare.

Determinarea matricii de trecere, în funcţie de mişcările din cuplele 4, 5, 6 se poate realiza cu relaţia: $\underline{{}^3R_6} = Rot(Z,\theta_4)Rot(Y,\theta_5)Rot(Z,\theta_6)$. (2.51)

Din relaţiile 2.50 şi 2.51 avem:

$$\underline{{}^3R_6} = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x \\ n_y & o_y & a_y \\ n_z & o_z & a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_4 & -s_4 & 0 \\ s_4 & c_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_5 & 0 & s_5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_5 & 0 & c_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 \\ s_6 & c_6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (2.52)$$

Relaţia 2.52 se va rearanja convenabil; adică

$$\begin{bmatrix} c_4 & -s_4 & 0 \\ s_4 & c_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x \\ n_y & o_y & a_y \\ n_z & o_z & a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_5 & 0 & s_5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_5 & 0 & c_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 \\ s_6 & c_6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$ unde matricea inversă este: $\begin{bmatrix} c_4 & -s_4 & 0 \\ s_4 & c_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} c_4 & s_4 & 0 \\ -s_4 & c_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Efectuând înmulţirile matricilor de ambele părţi ale egalităţii, se obţine:

$$\begin{bmatrix} n_x c_4 + n_y s_4 & o_x c_4 + o_y s_4 & a_x c_4 + a_y s_4 \\ -n_x s_4 + n_y c_4 & -o_x s_4 + o_y c_4 & \boxed{-a_x s_4 + a_y c_4} \\ n_z & o_z & a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_5 c_6 & -c_5 s_6 & s_5 \\ s_6 & c_6 & \boxed{0} \\ -s_5 c_6 & s_5 s_6 & c_5 \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

Alegând convenabil egalităţile între elementele matricilor de ambele părţi ale semnului egal, avem: $-a_x sin\theta_4 + a_y cos\theta_4 = 0; tg\theta_4 = \frac{a_y}{a_x};\ \theta_4 = \text{atan}\left(\frac{a_y}{a_x}\right) + k\pi$

$$a_x cos\theta_4 + a_y sin\theta_4 = sin\theta_5;\ a_z = cos\theta_5; tg\theta_5 = \frac{a_x cos\theta_4 + a_y sin\theta_4}{a_z};\ \theta_5 =$$
$$= \text{atan}\left(\frac{a_x cos\theta_4 + a_y sin\theta_4}{a_z}\right) + k\pi \quad (2.54)$$

Pentru a se obţine o formă mai elegantă (matematic) pentru θ_5, se caută alte expresii pentru calculul lui $\sin\theta_4$ şi $\cos\theta_4$ şi avem:

$$a_y cos\theta_4 - a_x sin\theta_4 = 0;\ a_y{}^2(1 - sin^2\theta_4) = a_x^2 sin^2\theta_4; sin\theta_4 = \frac{a_y}{\pm\sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2}}$$

$$a_y cos\theta_4 - a_x sin\theta_4 = 0;\ a_y{}^2 cos^2\theta_4 = a_x^2(1 - cos^2\theta_4)\ \ ; cos\theta_4 = \frac{a_x}{\pm\sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2}} \quad (2.55)$$

Utilizând relaţiile 2.55 pentru sin şi cos de θ_4, obţinem:

$$\theta_5 = \text{atan}\left(\frac{a_x cos\theta_4 + a_y sin\theta_4}{a_z}\right) = atan\left(\frac{a_x \frac{a_x}{\pm\sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2}} + a_y \frac{a_y}{\pm\sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2}}}{a_z}\right)$$

$$\theta_5 = atan\left(\frac{\pm\sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2}}{a_z}\right) \quad (2.56)$$

$$sin\theta_6 = -n_x sin\theta_4 + n_y cos\theta_4; cos\theta_6 = -o_x sin\theta_4 + o_y cos\theta_4$$

$$tg\theta_6 = \frac{-n_x sin\theta_4 + n_y cos\theta_4}{-o_x sin\theta_4 + o_y cos\theta_4};\ \theta_6 = \text{atan}\left(\frac{-n_x sin\theta_4 + n_y cos\theta_4}{-o_x sin\theta_4 + o_y cos\theta_4}\right) + \text{k}\pi \quad (2.57)$$