

3. Mișcarea diferențială și comanda mișcărilor robotului

3.1 Determinarea matricii Jacobiene în robotica industrială

Fie robotul industrial serial din figura 3.1. S-a notat cu $O_0x_0y_0z_0$ sistemul de referință atașat bazei robotului (în literatură: World Coordinate System), cu M punctul caracteristic (TCP-Tool Center Point) pe efectorul final. Fie \bar{v}_M vectorul de viteză liniară al deplasării punctului caracteristic și $\bar{\omega}_M$ vectorul de viteză unghiulară al rotației sistemului de referință din punctul caracteristic (cel care determină variația orientării efectorului final al robotului).

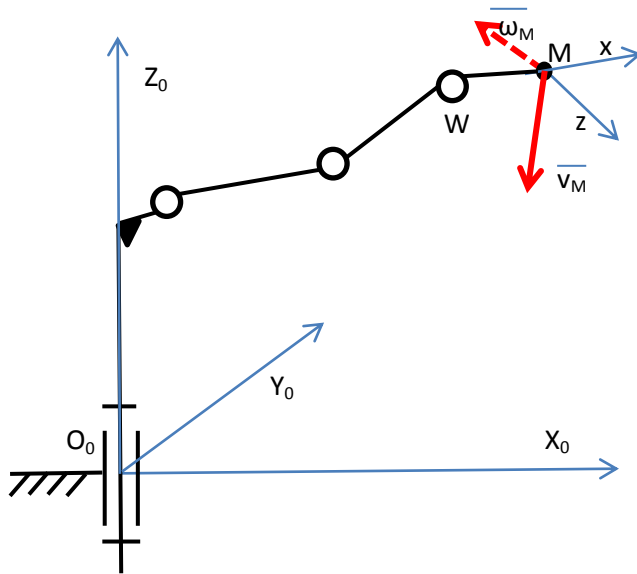


Figura 3.1 Viteza liniară și unghiulară în punctul caracteristic M

Fie q_i parametrii generalizați cinematici de deplasare în cuplele cinematice conducătoare, unde $i=1 \div n$, $n=M$, gradul de mobilitate al lanțului cinematic deschis al robotului (de regulă $M=6$). În cazul robotului 4R din figura 3.1, $q_i=\theta_i$ (4 cuple de rotație), $i=1 \div 4$.

Fie coordonatele punctului M : X_M, Y_M, Z_M , t timpul și vitezele liniare și unghiulare ale lui M .

$$\bar{v}_M = \frac{d(X_M)}{dt} \bar{i}_o + \frac{d(Y_M)}{dt} \bar{j}_o + \frac{d(Z_M)}{dt} \bar{k}_o$$

$$\bar{\omega}_M = \frac{d(Ya_M)}{dt} \bar{i}_6 + \frac{d(P_M)}{dt} \bar{j}_6 + \frac{d(Ro_M)}{dt} \bar{k}_6,$$

unde Ya (Yaw) este rotația în jurul axei O_Wx_W , P (Pitch) este rotația în jurul axei O_Wy_W , Ro (Roll) este rotația în jurul axei O_Wz_W . În cazul robotului din figura 3.1 $\bar{\omega}_M = \frac{d(P_W)}{dt} \bar{j}_4$; W este wrist point, punctul de intersecție al axelor cuplelor cinematice de orientare. În cazul robotului cu 6 cuple cinematice, notăm matricea vectorilor de viteză liniară și unghiulară cu $\dot{X} = [\dot{X}_M \dot{Y}_M \dot{Z}_M \dot{Y}a_M \dot{P}_M \dot{R}o_M]^T$; $\dot{Q} = [q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4 \ q_5 \ q_6]^T$.

Comanda deplasării punctului caracteristic cu o viteză controlată de-a lungul traiectoriei sale este o caracteristică importantă, necesară în foarte multe aplicații industriale (de sudare, de vopsire, de debavurare, de lipire, etc.).

De aceea se pune întrebarea: comandând viteza unghiulară din cuplele cinematice la o anumită valoare (\dot{q}_i), ce viteză obținem în punctul M sau, pentru o anumită viteză în M , ce valoare de viteză comandăm în cuple?

Legătura între cele două matrici de viteze din cuplele generalizate \dot{Q} și de coordonate generalizate \dot{X} se face prin matricea Jacobiană:

$$\dot{X} = J\dot{Q} = \begin{bmatrix} J_{11} & \cdots & J_{16} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ J_{61} & \cdots & J_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_6 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Prin înmulțirea matricilor, relația 3.1 devine:

$$\begin{aligned} \frac{dX_M}{dt} &= J_{11} \frac{dq_1}{dt} + J_{12} \frac{dq_2}{dt} + J_{13} \frac{dq_3}{dt} + J_{14} \frac{dq_4}{dt} + J_{15} \frac{dq_5}{dt} + J_{16} \frac{dq_6}{dt} \\ \frac{dY_M}{dt} &= J_{21} \frac{dq_1}{dt} + J_{22} \frac{dq_2}{dt} + J_{23} \frac{dq_3}{dt} + J_{24} \frac{dq_4}{dt} + J_{25} \frac{dq_5}{dt} + J_{26} \frac{dq_6}{dt} \\ \frac{dZ_M}{dt} &= J_{31} \frac{dq_1}{dt} + J_{32} \frac{dq_2}{dt} + J_{33} \frac{dq_3}{dt} + J_{34} \frac{dq_4}{dt} + J_{35} \frac{dq_5}{dt} + J_{36} \frac{dq_6}{dt} \\ \frac{dYa_M}{dt} &= J_{41} \frac{dq_1}{dt} + J_{42} \frac{dq_2}{dt} + J_{43} \frac{dq_3}{dt} + J_{44} \frac{dq_4}{dt} + J_{45} \frac{dq_5}{dt} + J_{46} \frac{dq_6}{dt} \\ \frac{dP_M}{dt} &= J_{51} \frac{dq_1}{dt} + J_{52} \frac{dq_2}{dt} + J_{53} \frac{dq_3}{dt} + J_{54} \frac{dq_4}{dt} + J_{55} \frac{dq_5}{dt} + J_{56} \frac{dq_6}{dt} \\ \frac{dRo_M}{dt} &= J_{61} \frac{dq_1}{dt} + J_{62} \frac{dq_2}{dt} + J_{63} \frac{dq_3}{dt} + J_{64} \frac{dq_4}{dt} + J_{65} \frac{dq_5}{dt} + J_{66} \frac{dq_6}{dt} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Determinarea elementelor matricii Jacobiene

Dacă eliminăm numitorul din prima ecuație 3.2, avem:

$$dX_M = J_{11}dq_1 + J_{12}dq_2 + J_{13}dq_3 + J_{14}dq_4 + J_{15}dq_5 + J_{16}dq_6 \quad (3.3)$$

Dacă se împarte ecuația 3.3 cu dq_1 , obținem:

$$\frac{dX_M}{dq_1} = J_{11} \frac{dq_1}{dq_1} + J_{12} \frac{dq_2}{dq_1} + J_{13} \frac{dq_3}{dq_1} + J_{14} \frac{dq_4}{dq_1} + J_{15} \frac{dq_5}{dq_1} + J_{16} \frac{dq_6}{dq_1} \quad (3.4)$$

$$\frac{dX_M}{dq_1} = J_{11} + J_{12} \frac{dq_2}{dq_1} + J_{13} \frac{dq_3}{dq_1} + J_{14} \frac{dq_4}{dq_1} + J_{15} \frac{dq_5}{dq_1} + J_{16} \frac{dq_6}{dq_1} \quad (3.5)$$

Dar, $\frac{dq_2}{dq_1} = 0$; $\frac{dq_3}{dq_1} = 0$; ...; $\frac{dq_6}{dq_1} = 0$ pentru că deplasarea din actuatorului cuplei 1 nu influențează celelalte deplasări (mișcări din motoare) din cuplele 2, 3, 4, 5, 6. Putem concluziona că: $J_{11} = \frac{dX_M}{dq_1}$. Din cauză că coordonatele generalizate ale punctului M sunt funcții de parametrii generalizați din cuple, adică

$$\underline{X} = [f_1(q_1, \dots, q_6) \ f_2(q_1, \dots, q_6) \ \dots \ f_6(q_1, \dots, q_6)]^T, \quad J_{11} = \frac{\partial X_M}{\partial q_1} \text{ (derivată parțială a funcției } f_1).$$

Similar pentru obținerea termenului J_{12} , avem:

$\frac{dX_M}{dq_2} = J_{11} \frac{dq_1}{dq_2} + J_{12} \frac{dq_2}{dq_2} + J_{13} \frac{dq_3}{dq_2} + J_{14} \frac{dq_4}{dq_2} + J_{15} \frac{dq_5}{dq_2} + J_{16} \frac{dq_6}{dq_2}$, de unde, prin același raționament, obținem: $J_{12} = \frac{dX_M}{dq_2}$.

Extrapolând raționamentele pentru toate cele 6 cuple cinematice, obținem matricea Jacobiană:

$$\underline{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X_M}{\partial q_1} & \frac{\partial X_M}{\partial q_2} & \frac{\partial X_M}{\partial q_3} & \frac{\partial X_M}{\partial q_4} & \frac{\partial X_M}{\partial q_5} & \frac{\partial X_M}{\partial q_6} \\ \frac{\partial Y_M}{\partial q_1} & \frac{\partial Y_M}{\partial q_2} & \frac{\partial Y_M}{\partial q_3} & \frac{\partial Y_M}{\partial q_4} & \frac{\partial Y_M}{\partial q_5} & \frac{\partial Y_M}{\partial q_6} \\ \frac{\partial Z_M}{\partial q_1} & \frac{\partial Z_M}{\partial q_2} & \frac{\partial Z_M}{\partial q_3} & \frac{\partial Z_M}{\partial q_4} & \frac{\partial Z_M}{\partial q_5} & \frac{\partial Z_M}{\partial q_6} \\ \frac{\partial Ya_M}{\partial q_1} & \frac{\partial Ya_M}{\partial q_2} & \frac{\partial Ya_M}{\partial q_3} & \frac{\partial Ya_M}{\partial q_4} & \frac{\partial Ya_M}{\partial q_5} & \frac{\partial Ya_M}{\partial q_6} \\ \frac{\partial P_M}{\partial q_1} & \frac{\partial P_M}{\partial q_2} & \frac{\partial P_M}{\partial q_3} & \frac{\partial P_M}{\partial q_4} & \frac{\partial P_M}{\partial q_5} & \frac{\partial P_M}{\partial q_6} \\ \frac{\partial Ro_M}{\partial q_1} & \frac{\partial Ro_M}{\partial q_2} & \frac{\partial Ro_M}{\partial q_3} & \frac{\partial Ro_M}{\partial q_4} & \frac{\partial Ro_M}{\partial q_5} & \frac{\partial Ro_M}{\partial q_6} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

De exemplu, în cazul robotului în coordonate cilindrice, avem matricea Jacobiană 3×3 (3 cuple cinematice conducătoare, θ_1, s_2, s_3 parametrii cinematici din cuple), iar elementele lui J sunt:

$$J_{11} = \frac{\partial X_M}{\partial \theta_1} = \frac{\partial(a_2 \cdot \cos\theta_1 + s_3 \cdot \sin\theta_1)}{\partial \theta_1} = s_3 \cdot \cos\theta_1 - a_2 \cdot \sin\theta_1; J_{12} = \frac{\partial X_M}{\partial s_2} = 0; J_{13} = \frac{\partial X_M}{\partial s_3} = \sin\theta_1$$

$$J_{21} = \frac{\partial Y_M}{\partial \theta_1} = \frac{\partial(a_2 \cdot \sin\theta_1 - s_3 \cdot \cos\theta_1)}{\partial \theta_1} = s_3 \cdot \sin\theta_1 + a_2 \cdot \cos\theta_1; J_{22} = \frac{\partial Y_M}{\partial s_2} = 0; J_{23} = \frac{\partial Y_M}{\partial s_3} = -\cos\theta_1$$

$$J_{31} = \frac{\partial Z_M}{\partial \theta_1} = \frac{\partial(d_1 + s_2)}{\partial \theta_1} = 0; J_{32} = \frac{\partial Z_M}{\partial s_2} = 1; J_{33} = \frac{\partial Z_M}{\partial s_3} = 0.$$

Relația 3.1 devine, pentru robotul RTT:

$$\dot{X} = J\dot{Q}; \begin{bmatrix} V_{xM} \\ V_{yM} \\ V_{zM} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_3 \cdot \cos\theta_1 - a_2 \cdot \sin\theta_1 & 0 & \sin\theta_1 \\ s_3 \cdot \sin\theta_1 + a_2 \cdot \cos\theta_1 & 0 & -\cos\theta_1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{s}_2 \\ \dot{s}_3 \end{bmatrix}$$

$$V_{xM} = (s_3 \cdot \cos\theta_1 - a_2 \cdot \sin\theta_1)\dot{\theta}_1 + \dot{s}_3 \sin\theta_1;$$

$$V_{yM} = (s_3 \cdot \sin\theta_1 + a_2 \cdot \cos\theta_1)\dot{\theta}_1 - \dot{s}_3 \cos\theta_1; \quad V_{zM} = \dot{s}_2.$$

3.2 Proprietăți ale Jacobianului [1]

Fie, de exemplu un robot industrial serial cu lanțul cinematic deschis RR, ca în figura 3.2.

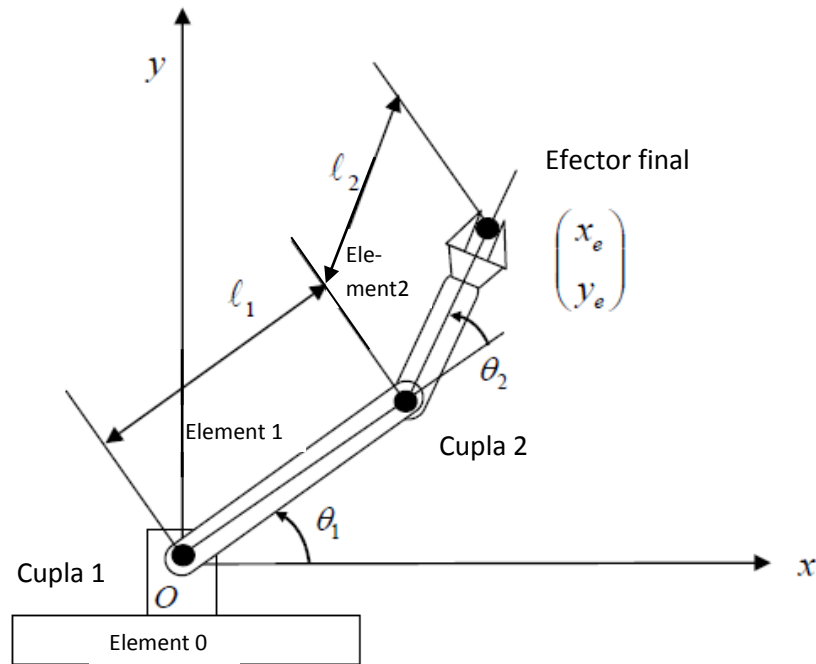


Figura 3.2 Schema cinematică a lanțului cinematic RR

Relațiile de calcul ale coordonatelor punctului caracteristic x_e, y_e sunt:

$$x_e = l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2); \quad y_e = l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \quad (3.7)$$

Dacă se iau în considerare mișcările mici, infinitezimale, din cuplele care intră în relația de calcul a lui x_e, y_e , se determină vitezele de mișcare ale efecteurului final.

$$\begin{aligned} dx_e &= \frac{\partial x_e}{\partial \theta_1} d\theta_1 + \frac{\partial x_e}{\partial \theta_2} d\theta_2 \\ dy_e &= \frac{\partial y_e}{\partial \theta_1} d\theta_1 + \frac{\partial y_e}{\partial \theta_2} d\theta_2 \end{aligned} \quad (3.8)$$

Relațiile 3.8 au o altă formă de scriere matricială, astfel:

$$\begin{bmatrix} dx_e \\ dy_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_e}{\partial \theta_1} & \frac{\partial x_e}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial y_e}{\partial \theta_1} & \frac{\partial y_e}{\partial \theta_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d\theta_1 \\ d\theta_2 \end{bmatrix}; \quad dX = Jdq \quad (3.9)$$

unde cu J s-a notat matricea Jacobiană¹, care exprimă relația diferențială între deplasările din cuplele cinematice conducătoare și mișcarea punctului caracteristic pe efecteurul final.

Prin derivarea relațiilor 3.7, matricea Jacobiană devine:

¹ Carl Gustav Jacob Jacobi ; (10 decembrie 1804 – 18 februarie 1851) a fost un matematician german care a realizat contribuții fundamentale în matematică (funcții eliptice, dinamică, ecuații diferențiale și teoria numerelor).

$$J = \begin{bmatrix} -l_1 \sin \theta_1 - l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) & -l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) & +l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Matricea Jacobiană reprezintă sensibilitatea deplasării efectorului final (punctul e) la deplasările din actuatorii cuplelor 1 și 2 (θ_1, θ_2).

Matricea vitezelor generalizate din cuple este: $\dot{q} = [\dot{\theta}_1 \quad \dot{\theta}_2]^T$; matricea vitezelor punctului caracteristic $v_e = [\dot{x}_e \quad \dot{y}_e]^T$ astfel încât $v_M = J\dot{q}$.

Proprietățile matricii Jacobiene

Matricea Jacobiană J are un rol important în analiza cinematică, proiectarea și comanda robotului. Matricea Jacobiană se poate descompune în: $J = (J_1, J_2)$, astfel încât

$$V_e = J_1 \dot{\theta}_1 + J_2 \dot{\theta}_2 \quad (3.11)$$

Unde J_1 exprimă influența mișcării din cupla 1 asupra mișcării punctului caracteristic, similiar J_2 pentru cupla 2. Fiecare coloană a lui J reprezintă v_e generată de cupla corespunzătoare, când celelalte cuple sunt imobile.

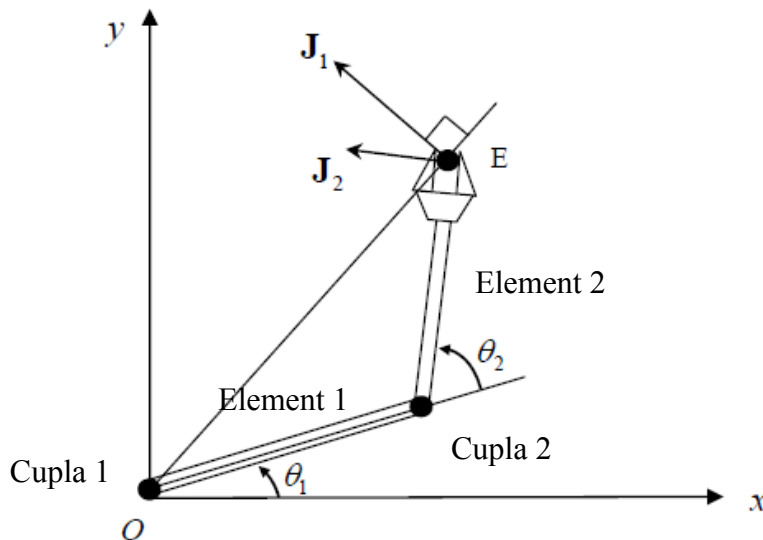


Figura 3.3. Interpretarea geometrică a coloanelor matricii Jacobiene

În figura 3.3 J_1 este perpendiculară pe dreapta OE, J_2 este perpendiculară pe l_2 .

Generalizând relația 3.11, avem:

$\dot{p} = J_1 \dot{q}_1 + J_2 \dot{q}_2 + \dots + J_n \dot{q}_n$, unde $\dot{p} = [v_{xE} \quad v_{yE} \quad v_{zE} \quad \omega_{xE} \quad \omega_{yE} \quad \omega_{zE}]^T$ și n este numărul cuplelor active. Interpretarea geometrică a lui J_i este că acesta reprezintă viteza efectorului final, liniară și unghiulară, atunci când toate elementele sunt imobilizate, mai puțin cupla i, care are viteza de valoare 1.

Exercițiu: Fie robotul cu 2 cuple din figura 3.3. Relațiile de calcul ale coordonatelor punctului E utilizează unghiurile absolute, notate cu ψ , spre deosebire de unghiurile relative θ . În cupla 1 $\psi_1 = \theta_1$.

Elementele Jacobianului sunt funcții de deplasările din cuple și de aceea variază în funcție de configurația brațului. Derivatele parțiale $\frac{\partial x_e}{\partial \theta_i}$ și $\frac{\partial y_e}{\partial \theta_i}$ sunt funcții de θ_i , de aceea J_i variază cu postura brațului. Viteza efectorului final variază în funcție de direcția și mărimea lui J_i . Dacă vectorii J_i au direcții diferite, efectorul final se mișcă pe o direcție și cu o valoare anumită. Dacă, vectorii J_i sunt aliniați, efectorul final nu se poate mișca într-o direcție oarecare. În figura 3.5 se prezintă două posturi particulare ale brațului, în care cele două elemente ale robotului RR sunt coliniare, extinse sau suprapuse. Aceste poziții sunt denumite poziții singulare, iar condiția de poziție singulară este $\det J = 0$.

$$\text{Matricea } J \text{ (relația 3.10): } J = \begin{bmatrix} -l_1 \sin \theta_1 - l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) & -l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) & +l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix}$$

degenerează într-o configurare singulară, când $\theta_2 = 0^\circ$ sau $\theta_2 = 180^\circ$.

$$\text{Dacă } \theta_2 = 0^\circ, J = \begin{bmatrix} -l_1 \sin \theta_1 - l_2 \sin \theta_1 & -l_2 \sin \theta_1 \\ l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_1 & l_2 \cos \theta_1 \end{bmatrix},$$

$$\text{Dacă } \theta_2 = 180^\circ, J = \begin{bmatrix} -l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_1 & l_2 \sin \theta_1 \\ l_1 \cos \theta_1 - l_2 \cos \theta_1 & -l_2 \cos \theta_1 \end{bmatrix},$$

$$\text{Pentru ambele cazuri, } \det J = \det \begin{bmatrix} -(l_1 \pm l_2) \sin \theta_1 & \pm l_2 \sin \theta_1 \\ (l_1 \pm l_2) \cos \theta_1 & \pm l_2 \cos \theta_1 \end{bmatrix} = 0.$$

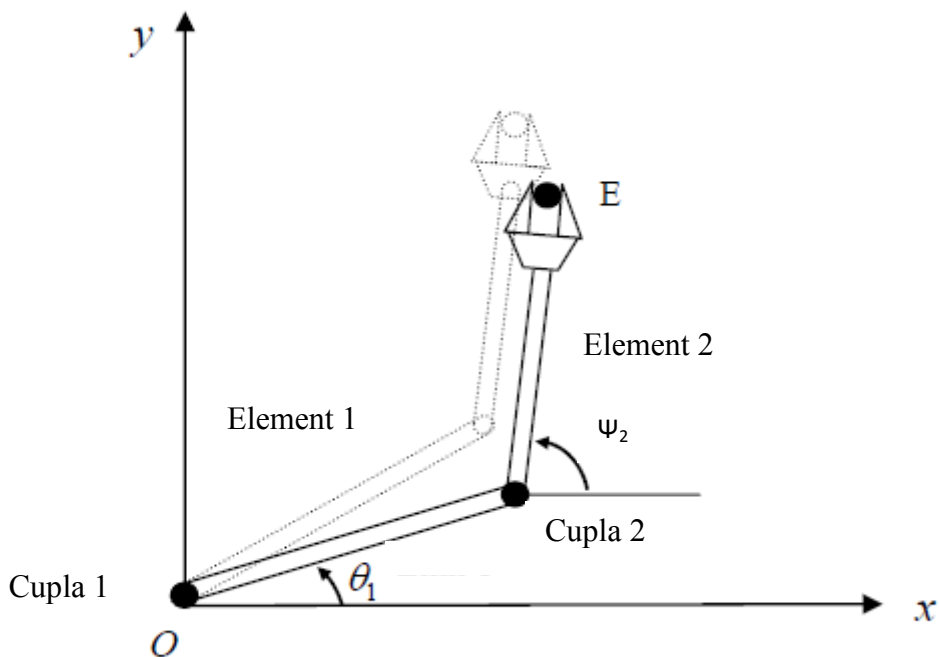


Figura 3.4. Unghiurile absolute unui robot RR

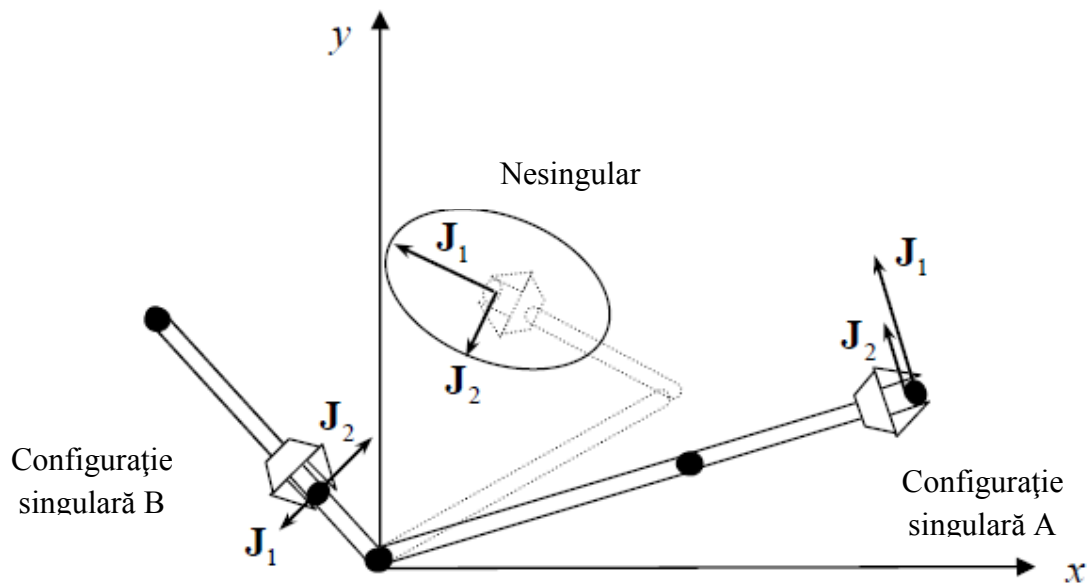


Figura 3.5. Postura cuplurilor cinematice (configurațiile brațului) în configurații singulare

3.3 Problema inversă a vitezelor unui robot

Problema inversă a vitezelor este de a găsi valorile vitezelor din cuplurile cinematice $\dot{q} = (\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2)^T$, pentru valori date ale vitezei efectorului final $v_e = (v_x, v_y)^T$. Dacă robotul nu este într-o configurație singulară, problema se rezolvă din ecuația:

$$\dot{q} = J^{-1}v_e \quad (3.12)$$

Soluțiile ecuației 3.12 sunt unice, spre deosebire de rezolvarea problemei cinematice inverse, la care se pot găsi mai multe soluții. Controlerul comandă și reglează vitezele din cuple, dar pentru a comanda viteza dorită a efectorului final v_e , se utilizează o schemă de urmărire a vitezelor din cuple pentru viteza dorită, care se numește „Resolved motion rate control” (Whitney, 1969). Această schemă calculează vitezele din cuple $\dot{\theta}$ cu relația [24]:

$\dot{\theta} = J^{-1}(\dot{X}_d + K * (X_d - X))$, unde X_d , \dot{X}_d descriu traiectoria dorită a efectorului final și viteza pe traiectorie, X descrie poziția curentă generalizată a efectorului final.

O poziție generalizată conține un vector de poziție descris față de sistemul de referință de bază, la care se adaugă reprezentarea orientării (unghiurile lui Euler).

Matricea Jacobiană inversă se poate obține doar dacă dispozitivul de ghidare al robotului nu este într-o poziție de singularitate. Dacă gradul de mobilitate $\gg 6$ sau e în poziție de singularitate, Jacobianul nu e o matrice 6×6 și se calculează o matrice Jacobiană pseudo-inversă.

Exemplu de comandă a mișcărilor efectorului final: Fie robotul din figura 3.6. Se dorește mișcarea efectorului final cu viteză constantă din punctul A(2,0), B(ϵ , 0), C(0, ϵ) și D(0,2). Se consideră $l_1=1$, $l_2=1$.

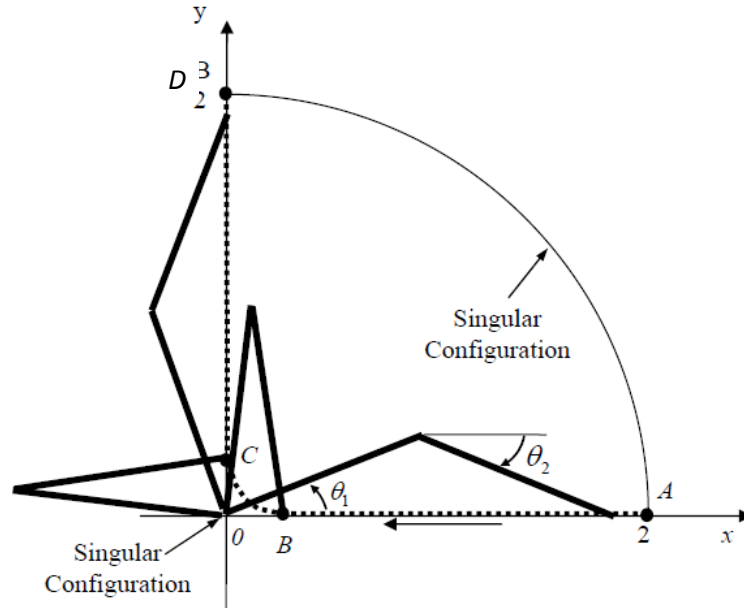


Figura 3.6 Traiectoria ABCD în apropiere de poziții singulare (în apropierea lui A, D și B, C)

Din relația 3.10, dacă $l_1=l_2=1$, se obține:

$$J = \begin{bmatrix} -\sin\theta_1 - \sin(\theta_1 + \theta_2) & -\sin(\theta_1 + \theta_2) \\ \cos\theta_1 + \cos(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Inversa matricii Jacobiene este:

$$J^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\cos(\theta_1 + \theta_2)}{\sin\theta_2} & \frac{\sin(\theta_1 + \theta_2)}{\sin\theta_2} \\ \frac{\cos\theta_1 + \cos(\theta_1 + \theta_2)}{\sin\theta_2} & \frac{\sin\theta_1 + \sin(\theta_1 + \theta_2)}{\sin\theta_2} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Din relația $\dot{Q} = J^{-1} * V_x$, unde în acest exemplu $V_x = [v_x \ v_y]^T$, $Q = [\theta_1 \ \theta_2]$, și

$$\begin{bmatrix} \frac{\cos(\theta_1 + \theta_2)}{\sin\theta_2} & \frac{\sin(\theta_1 + \theta_2)}{\sin\theta_2} \\ \frac{\cos\theta_1 + \cos(\theta_1 + \theta_2)}{\sin\theta_2} & \frac{\sin\theta_1 + \sin(\theta_1 + \theta_2)}{\sin\theta_2} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix}, \text{ prin înmulțirea matricilor, obținem}$$

relațiile de calcul ale lui $\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2$, adică:

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_1 &= \frac{\cos(\theta_1 + \theta_2)}{\sin\theta_2} v_x + \frac{\sin(\theta_1 + \theta_2)}{\sin\theta_2} v_y \\ \dot{\theta}_2 &= \frac{\cos(\theta_1 + \theta_2) + \cos\theta_1}{\sin\theta_2} v_x + \frac{\sin(\theta_1 + \theta_2) + \sin\theta_1}{\sin\theta_2} v_y \end{aligned}$$

(3.15)

Dacă se reprezintă variația lui $\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2$ cu relațiile 3.15, se obține graficul din figura 3.7.

Se observă că în apropierea lui A și D, viteza din cuple tinde la infinit, adică în matricea Jacobiană, pentru $\theta_2=0, \pi$, obținem:

$$J = \begin{bmatrix} -\sin\theta_1 - \sin(\theta_1 + \theta_2) & -\sin(\theta_1 + \theta_2) \\ \cos\theta_1 + \cos(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix}; J_{\theta_2=0} = \begin{bmatrix} -2\sin\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ 2\cos\theta_1 & \cos\theta_1 \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} -\sin\theta_1 - \sin(\theta_1 + \theta_2) & -\sin(\theta_1 + \theta_2) \\ \cos\theta_1 + \cos(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix}; J_{\theta_2=\pi} = \begin{bmatrix} 0 & \sin\theta_1 \\ 0 & -\cos\theta_1 \end{bmatrix}$$

în ambele cazuri $\det(J)=0$, deci pozițiile sunt singulare.

Concluzie: într-o configurație singulară, cel puțin într-o direcție, robotul nu poate genera o viteză diferită de zero a efortului final.

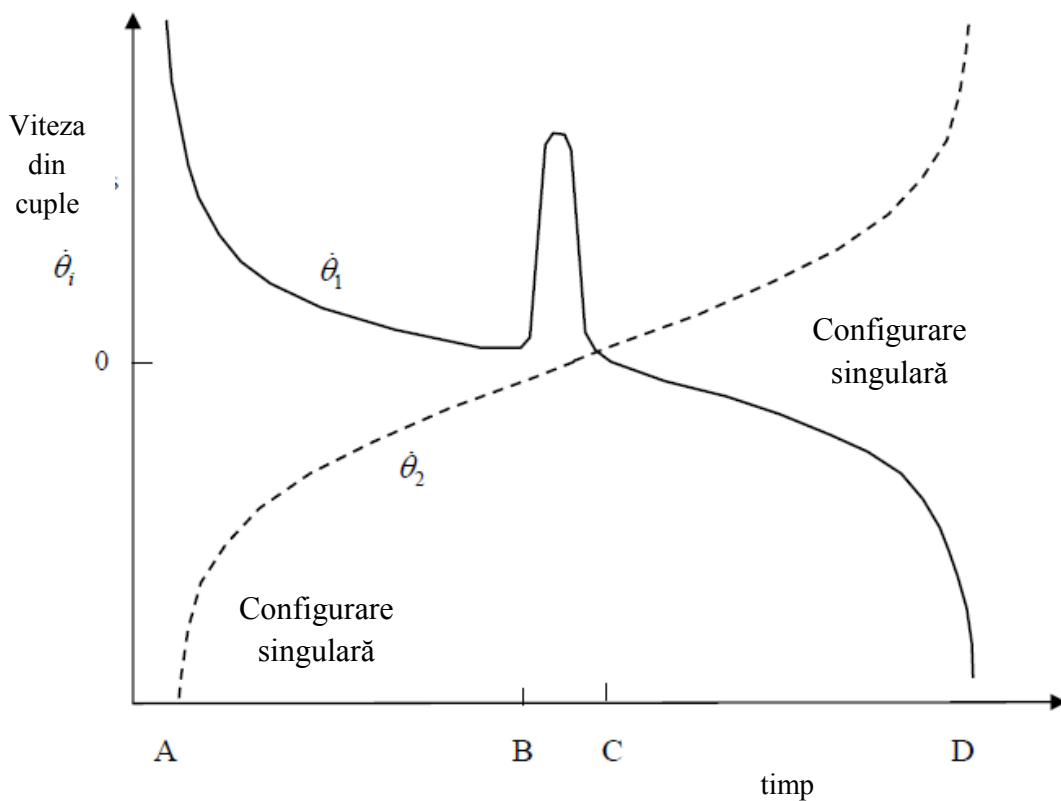


Figura 3.7 Variația lui $\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2$ pentru traiectoria ABCD

3.3 Comanda mișcărilor (PTP, liniare, circulare) ale robotului

Toți roboții industriali, indiferent de producător, sunt concepuți astfel încât punctul caracteristic M să se deplaseze pe traiectorii PTP, liniare și circulare.

Pe lângă mișcările pe traiectorie, robotul poate să aibă:

- mișcare în contact (cu obiectele exterioare): robotul se oprește sau își schimbă direcția de mișcare la contactul cu obstacole exterioare;

- mișcare “compliantă”: brațul robotului reacționează la forțele exterioare, încercând să le țină stabile și minime pe parcursul mișcării;
- mișcare grosieră: robotul execută mișcări cu viteze și accelerații mari;
- mișcare precisă: robotul execută mișcări cu viteze și accelerații mici, asigurând precizia de poziționare a punctului caracteristic.

Mișcarea PTP

Mișcarea PTP (Point-to-Point) este mișcarea în care punctul caracteristic al robotului se deplasează din poziția de start în poziția țintă pe o traiectorie oarecare, care nu este predictibilă de către programator (figura 3.8). Poziția P1 din figura 3.8 este poziția de start, P2 este poziția țintă, TCP (Tool Center Point) este punctul caracteristic al robotului.

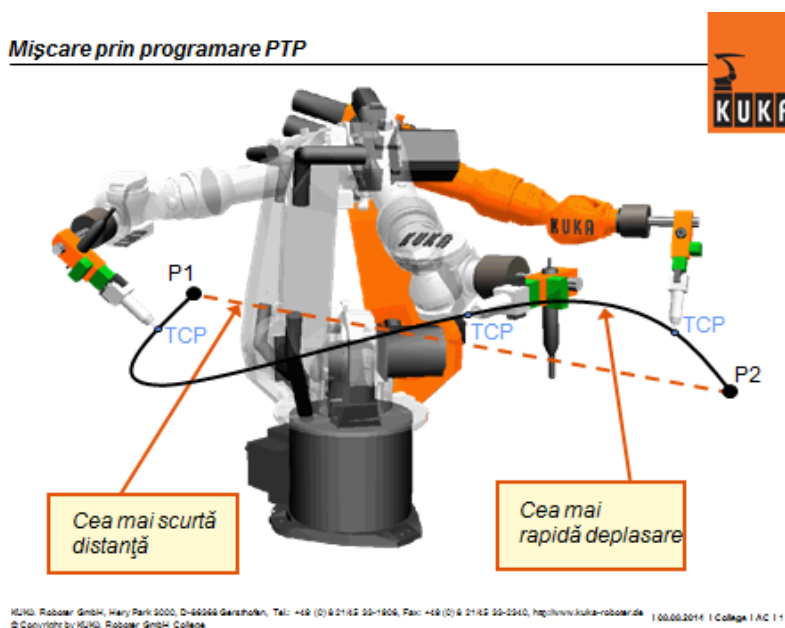


Figura 3.8 Mișcarea PTP a punctului caracteristic al robotului

Pozițiile P1 și P2 sunt poziții memorate și salvate în memoria RAM a controlerului robotului.

SYNCHRO - PTP

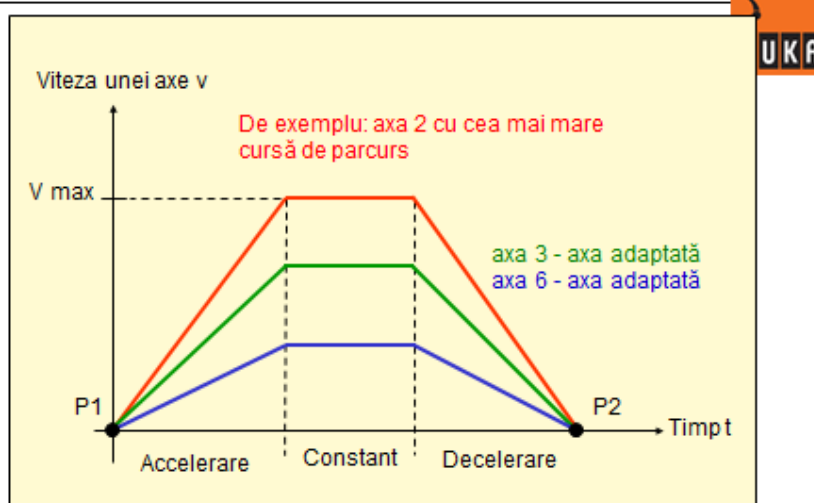


Figura 3.9 Profile de viteză pentru sincronizarea mișcărilor tuturor axelor robotului

În cursul programării on-line (adică programarea directă pe robot; se învață pozițiile din aplicație prin aducerea robotului cu ajutorul

panoului de învățare în pozițiile necesare, se editează/se testează programul direct în/din controler). La memorarea unei poziții a robotului se salvează valorile coordonatelor generalizate din cuplele sale cinemate conducătoare (q_i , unde $i=1\div 6$, dacă robotul are 6 axe comandate, unde q_i este unghiul θ_i dacă cupla este de rotație sau deplasarea s_i dacă aceasta este de translație).

Comanda mișcării PTP din poziția de start în cea țintă se generează în controler, pentru actuator, după ce se parcurg următoarele etape de calcul:

- Se determină $\Delta q_i = q_{iT} - q_{iS}$, unde q_{iT} și q_{iS} sunt valorile coordonatelor generalizate din axele comandate ale robotului în poziția țintă, respectiv în poziția start.
- Se determină valoarea maximă din șirul de valori Δq_i , notat cu $\max(\Delta q_m)$, valoare maximă pentru cupla cinematică conducătoare notată cu m .
- Se calculează timpul necesar pentru ca axa comandată m să parcurgă cursa $\max(\Delta q_m)$ cu valoarea maximă sau cu valoarea programată a vitezei (\dot{q}_m), adică $t = \frac{\max(\Delta q_m)}{\dot{q}_m}$.
- Se calculează valorile vitezelor generalizate pentru celelalte axe comandate, adică $\dot{q}_i = \frac{\Delta q_i}{t}$. În figura 3.9 se prezintă profilul de viteză trapezoidal a 3 axe comandate, în care axa 2 are valoarea $\max(\Delta q_m)$ de parcurs, celelalte 2 axe au viteze generalizate adaptate la axa 2, astfel încât deplasarea robotului din poziția start în poziția țintă să se facă sincronizat, în același timp pentru toate axele comandate.

Mișcarea liniară

Mișcarea liniară este mișcarea în care punctul caracteristic al robotului se deplasează din poziția de start în poziția țintă pe o traiectorie liniară, ca în figura 3.10. În acest paragraf nu se ia în considerare comanda orientării efectorului final al robotului, deci se presupune că efectorul final are aceeași orientare și în poziția start și în cea țintă, ca în figura 3.10.

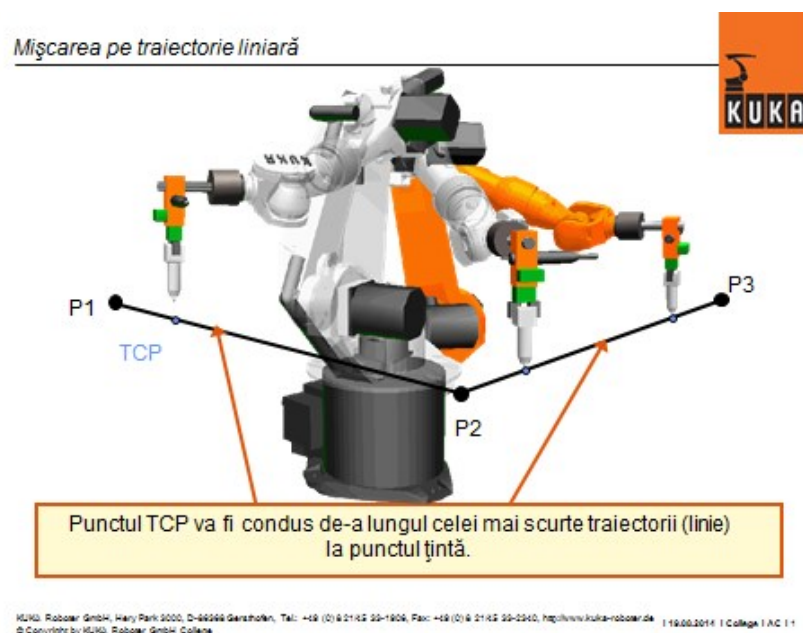


Figura 3.10 Mișcarea liniară a punctului caracteristic al robotului

Comanda mișcării liniare a robotului are următoarele etape de calcul premergătoare:

- Se calculează coordonatele punctului caracteristic al robotului în raport cu sistemul de referință ales de către utilizator (sistemul de referință atașat bazei robotului sau cel atașat piesei), notate aici cu x_{MS} , y_{MS} , z_{MS} în poziția de start al robotului, respectiv cu x_{MT} , y_{MT} , z_{MT} , în poziția țintă. Coordonatele din pozițiile start și țintă ale robotului în raport cu sistemul de referință atașat bazei robotului se calculează cu relațiile determinate din rezolvarea problemei cinematico-poziționale directe a robotului.
- Se determină ecuațiile dreptei $M_S M_T$, dreapta pe care punctul caracteristic al robotului se va deplasa din poziția de start în cea de țintă, $\frac{x-x_{MS}}{x_{MT}-x_{MS}} = \frac{y-y_{MS}}{y_{MT}-y_{MS}} = \frac{z-z_{MS}}{z_{MT}-z_{MS}}$ (3.16)
- Se determină coordonatele punctelor de interpolare $M_j, j=1 \div N$, de pe traiectoria determinată de dreapta $M_S M_T$, (figura 3.10), din ecuațiile (3.16), în care pentru valori date ale uneia dintre coordonatele x sau y sau z , se calculează celelalte coordonate:

$$\frac{x_j - x_{MS}}{x_{MT} - x_{MS}} = \frac{y_j - y_{MS}}{y_{MT} - y_{MS}} = \frac{z_j - z_{MS}}{z_{MT} - z_{MS}} \quad (3.17)$$

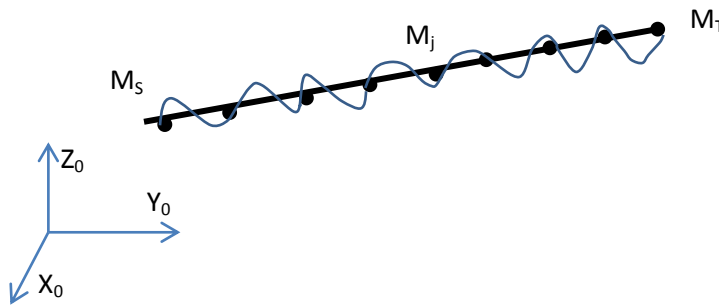


Figura 3.11 Punctele de interpolare de pe traiectoria liniară de deplasare a robotului și deplasarea efectivă a TCP-ului robotului prin mișcare PTP între punctele M_j

- Se rezolvă problema cinematico-pozițională inversă a robotului, astfel încât pentru fiecare dintre valorile cunoscute ale coordonatelor punctelor M_j (x_j , y_j , z_j) să se determine valorile coordonatelor generalizate $q_{ij}, i=1 \div 6, j=1 \div N$, după care se generează comenzile pentru mișcarea PTP (ca mai sus), unde $S \equiv j - 1, T \equiv j$.
- Mișcarea liniară este de fapt o mișcare PTP între poziții de interpolare, de la poziția de start ($j=1$) până în cea țintă ($j=N$). Cu cât N este mai mare, cu atât eroarea de deplasare a TCP-ului pe traiectoria liniară este mai mică.

Mișcarea circulară

Mișcarea circulară este mișcarea în care punctul caracteristic al robotului se deplasează din poziția de start în poziția țintă pe o traiectorie circulară, ca în figura 3.12. Trei puncte determină biunivoc un cerc, așa cum se observă din figura 3.12, sunt necesare 3 poziții memorate ale robotului, start, țintă și intermediară.

Comanda mișcării circulare a robotului are următoarele etape de calcul premergătoare:

- Se calculează coordonatele punctului caracteristic al robotului în raport cu sistemul de referință ales de către utilizator, notate cu x_{MS} , y_{MS} , z_{MS} în poziția de start al robotului, cu x_{MT} , y_{MT} , z_{MT} , în poziția țintă și respectiv x_{MI} , y_{MI} , z_{MI} , în poziția intermediară. Coordonatele din pozițiile start și țintă ale robotului în raport cu sistemul de referință atașat bazei robotului se calculează cu relațiile determinate din rezolvarea problemei cinematico-poziționale directe a robotului.
- Se determină ecuația planului (notat cu P) determinat de cele 3 puncte în spațiu,

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_{MS} & y_{MS} & z_{MS} & 1 \\ x_{MI} & y_{MI} & z_{MI} & 1 \\ x_{MT} & y_{MT} & z_{MT} & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (3.18)$$

- În planul P determinat de punctele M_S , M_I și M_T , se calculează coordonatele punctelor de interpolare M_K , care aparțin cercului și verifică ecuația planului,

$$\begin{vmatrix} X_{Mk}^2 + Y_{Mk}^2 & X_{Mk} & Y_{Mk} & 1 \\ X_{MS}^2 + Y_{MS}^2 & X_{MS} & Y_{MS} & 1 \\ X_{MI}^2 + Y_{MI}^2 & X_{MI} & Y_{MI} & 1 \\ X_{MT}^2 + Y_{MT}^2 & X_{MT} & Y_{MT} & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (3.19)$$

unde s-a notat cu X, Y valorile coordonatelor punctelor M_S , M_I și M_T în raport cu sistemul de coordonate din planul P, ales ca în figura 3.13.

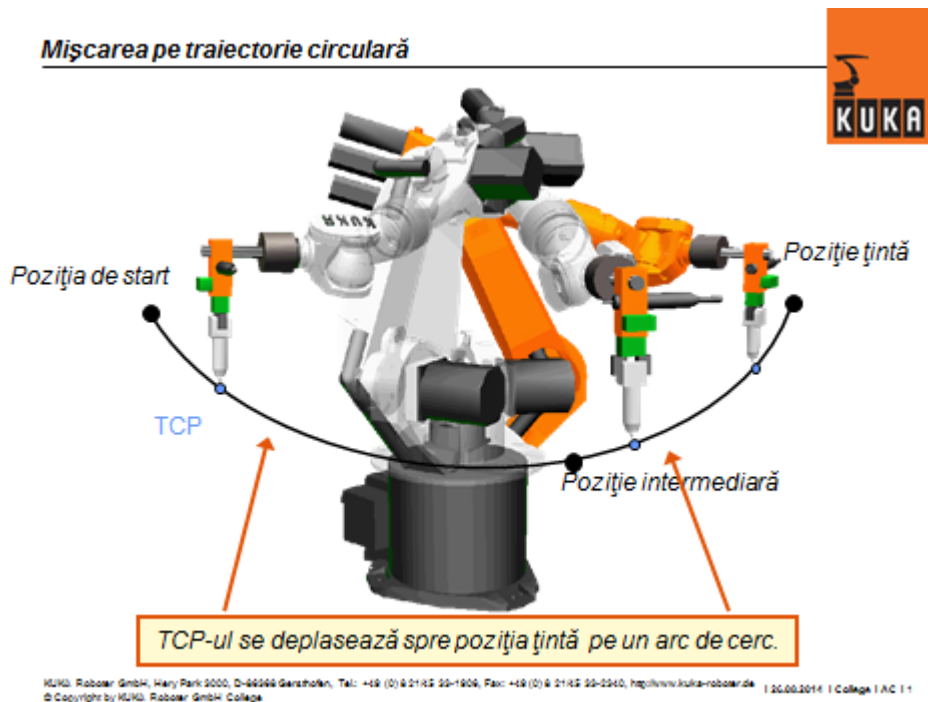


Figura 3.12. Mișcarea circulară a TCP-ului robotului

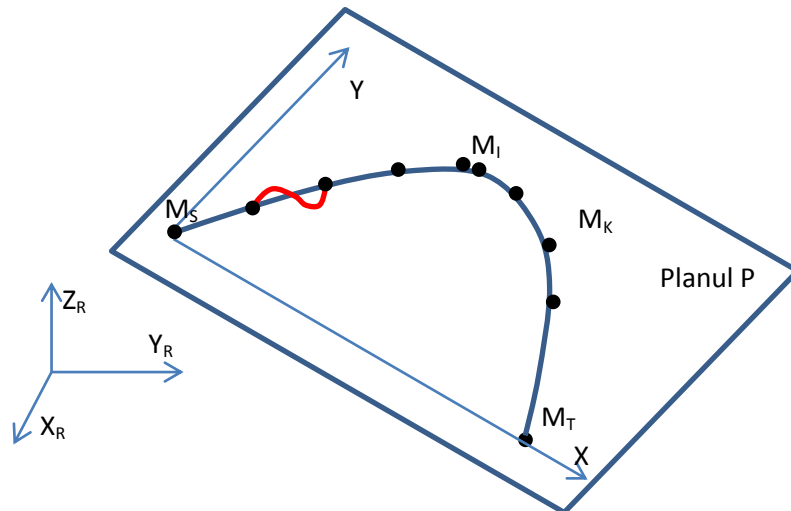


Figura 3.13. Punctele de interpolare M_K de pe traiectoria cercului determinat de M_S , M_I și M_T și sistemul de referință “nou” M_SXY față de care se determină coordonatele punctelor M_K .

- Se determină matricea de trecere ${}^R T_P$, cu metoda cunoscută, după care se recalculează coordonatele punctelor de interpolare de pe cerc, M_K , cu relația

$${}^R r_{M_K} = {}^R T_P \cdot {}^P r_{M_K} \quad (3.20)$$
- Se rezolvă problema cinematico-pozițională inversă a robotului, astfel încât pentru fiecare dintre valorile cunoscute ale coordonatelor punctelor M_K (x_K, y_K, z_K) să se determine valorile coordonatelor generalizate q_{iK} $i=1\div 6, k=1\div N$, după care se generează comenzile pentru mișcarea PTP (ca mai sus), unde $S \equiv K - 1, T \equiv K$.