

Sinteza mecanismelor cu elemente dințate

Sinteza mecanismelor cu roți dințate are ca scop definirea geometrică a roților și danturilor acestora astfel încât să se asigure condițiile funcționale impuse, adică să se realizeze transmiterea mișcării de rotație cu un raport de transmitere impus prin tema de proiectare.

Elementele caracteristice ale danturii unei roți dințate

În Fig.1 se prezintă configurația geometrică a danturii unei roți dințate cilindrice și denumirea elementelor caracteristice ale acesteia.

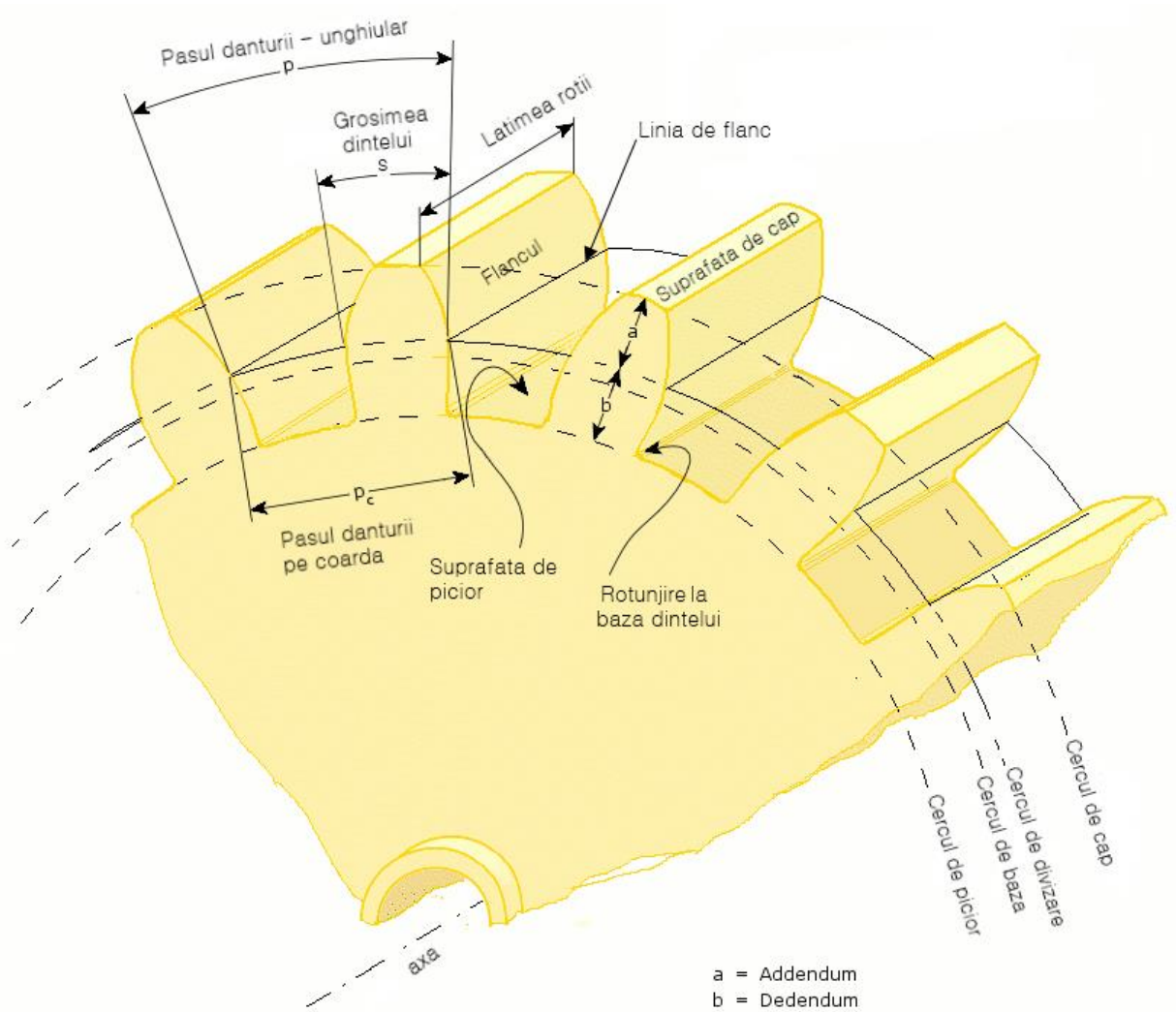


Fig.1 Dimensiuni caracteristice ale unei roți dințate

Suprafața de cap și de picior delimitează dantura în înălțime.

Flancul reprezintă fața laterală a roții dințate.

Linia flancului reprezintă intersecția dintre flancul dintelui și **suprafața de divizare** pe care se face, în mod convențional, segmentarea/divizarea danturii.

Profilul frontal al dintelui reprezintă intersecția dintre flancul dintelui și un plan perpendicular pe axa roții.

Cercul de bază este cercul de la care începe trasarea/generarea evolventei care generează profilul dintelui

Addendum-ul este înălțimea dintelui măsurată de la cercul de divizare (sau distanța radială dintre cercul de divizare și cercul de cap al unui dinte)

Dedendum-ul este distanța radială de la cercul de divizare la cercul de picior pentru un dinte

Axa este axa de rotație a roții dințate

Pasul danturii este distanța dintre două puncte omoloage de pe doi dinți adiacenți. Poate fi unghiular (unghiul pe care punctele și centrul roții îl formează) sau pe coarda care unește cele două puncte.

Angrenajul plan

Angrenajul plan este angrenajul obținut prin secționarea unui angrenaj cilindric cu un plan frontal, perpendicular pe axe.

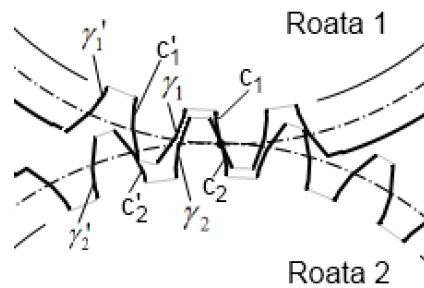


Fig.2 Rețele de curbe omoloage

Cele 2 roți dințate secționate astfel poartă numele de plane dințate. Curbele c_1 și c_2 sunt curbe reciproc înfășurate și ele materializează zonele de contact a unei cuple superioare

$\left. \begin{matrix} c_1, c_1', c_1'' \\ c_2, c_2', c_2'' \end{matrix} \right\}$ - sunt denumite, rețele de curbe omoloage

$\left. \begin{matrix} \gamma_1, \gamma_1', \gamma_1'' \\ \gamma_2, \gamma_2', \gamma_2'' \end{matrix} \right\}$ - sunt denumite rețele de curbe antiomoloage

Flancurile dinților unei roți dințate se mai pot defini ca suprafețele care delimitează rețelele de curbe omoloage și antiomoloage.

Legea angrenării

Legea angrenării exprimă condiția ca raportul de transmitere instantaneu să rămână constant și egal cu raportul de transmitere mediu

$$i_{12} = \frac{\omega_{10}}{\omega_{20}} = \frac{z_2}{z_1}$$

Așa cum s-a arătat în capitolul "Structura mecanismelor - Transformarea instantaneu izocinetică", centrul instantaneu de rotație în mișcarea relativă a două elemente legate între ele printr-o

cuplă cinematică superioară se găsește pe normala comună la profile în punctul de contact. Pentru cei doi dinți aflați în contact din Fig.3, CIR (I_{12}) se va găsi la intersecția normalei n-n cu linia centrelor O_1O_2 .

În acest caz, raportul de transmitere se poate scrie sub forma:

$$i_{12} = \frac{\omega_{10}}{\omega_{20}} = \frac{O_2I}{O_1I} = \frac{r_{w2}}{r_{w1}} = ct \quad (1)$$

iar distanța (invariabilă) dintre axe este:

$$a = O_1I + O_2I = r_{w1} + r_{w2} \quad (2)$$

din aceste expresii rezultă

$$r_{w1} = \frac{a}{i_{12} + 1} \text{ și } r_{w2} = a \frac{i_{12}}{i_{12} + 1}$$

adică centrul instantaneu de rotație I ocupă o poziție finită pe linia centrelor. În cazul angrenajelor el poartă numele de **pol al angrenării** și se notează cu C. Profilele care satisfac această condiție se numesc profile conjugate

Se notează cu r_{w1} și r_{w2} razele cercurilor de rostogolire (divizare) corespunzătoare celor două roți dințate aflate în angrenare.

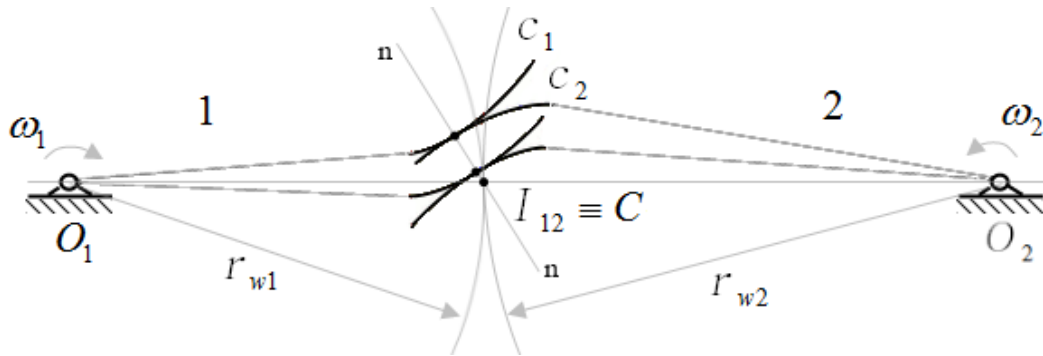


Fig.3 Determinarea CIR în mișcarea relativă a elementelor 1 și 2

Cu acestea legea angrenării se poate enunța astfel:

Condiția ca două profile să fie conjugate este ca normala lor comună în punctul de contact, pentru orice poziție a profilelor să treacă mereu printr-un punct fix C numit polul angrenării.

La această condiție se adaugă evident condiția necesară ca două roți să poată funcționa într-un angrenaj și anume egalitatea modulelor

$$m = \frac{p}{\pi}$$

Construcția Reuleaux pentru profile conjugate. Linia de angrenare. Condiția de interschimbabilitate a roților dințate

Cunoscând profilul dintelui unei roți (de exemplu c_2) și razele cercurilor de rostogolire pentru cele două roți, se pune problema determinării profilului conjugat c_1 .

În acest fel, transmiterea mișcării prin intermediul acestor profile se va face cu respectarea legii angrenării.

Fie $M_2 \in c_2 \in 2$, un punct care parcurge profilul c_2 (punct curent). Normala la c_2 în acest punct este M_2m_2 , care netrecând prin polul angrenării C conduce la concluzia că M_2 nu este punct de contact cu elementul 1. M_2 devine punct de contact în momentul în care m_2 ajunge în C. În această situație, M_2 împreună cu M_1 (necunoscut încă) au ajuns în punctul M , iar $MC = M_2m_2$ reprezintă normala comună la cele două profile.

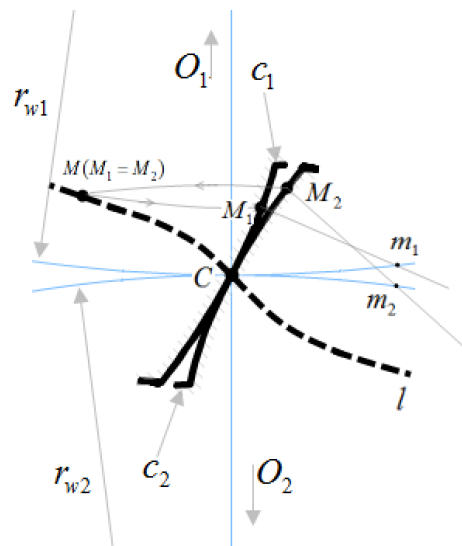


Fig.4 Construcția profilului conjugat c_1 pentru un profil dat c_2

Pentru a găsi poziția lui $M_1 \in c_1 \in 1$ în momentul inițial, se revine la această poziție dând o mișcare de rotație inversă ambelor roți. M_1 se va găsi pe arcul de cerc de rază O_1M la distanța

$$MC = M_1m_1 = M_2m_2$$

de punctul m_1 de pe cercul de rostogolire 1 cu condiția evidentă a rostogolirii pure,

$$\text{arcurile } Cm_2 = Cm_1$$

Prin această construcție se poate determina pas cu pas profilul c_1 .

Dacă punctul curent M_2 parcurge profilul c_2 , punctul M_1 generează profilul c_1 atunci punctul de contact M va descrie în planul fix o curbă l numită linie de angrenare. Rezultă deci că linia de angrenare este locul geometric al punctelor de contact în planul fix.

Condiția interschimbabilității roților dințate de același modul este ca liniile lor de angrenare să fie identice și simetrice în raport cu polul angrenării.

Definirea profilelor conjugate cu ajutorul liniei de angrenare. Profile cicloidale și profile evolventice

Problema generării profilelor conjugate se poate pune și invers, adică: dându-se linia de angrenare, legea de mișcare a punctului de contact M (viteza lui M) și starea de mișcare a celor două roți, să rezulte cele două profile conjugate c_1 și c_2 ca locuri geometrice ale punctului M în planele roților 1 și 2 – Fig.5.

Procesul poate fi imaginat în felul următor, se consideră planele roților ca două foi de tablă cu mișcare identică cu cea a roților 1 și 2, iar în planul fix, pe linia de angrenare se deplasează un punct laser M cu viteză prescrisă. În deplasarea lor relativă, punctul M va tăia în tablă două profile identice cu profilele conjugate c_1 și c_2 .

Dacă se alege linia de angrenare în mod convenabil se pot genera profile având configurații geometrice favorabile din mai multe puncte de vedere: manufacturare ușoară, interschimbabilitate, influență a variației distanței dintre axe, variația forței de angrenare, solicitare la contact, tehnologie de execuție.

Din aceste puncte de vedere se disting două tipuri de profile

- profile cicloidale – Fig.5
- profile evolventice

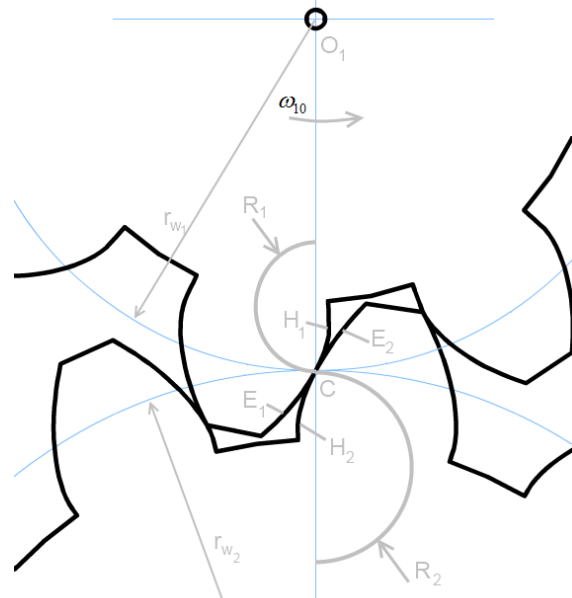


Fig.5 Linie de angrenare compusă din arce de cerc, profile cicloidale pentru dantura

Pentru a obține **profile cicloidale** la dinții roților dințate, **linia de angrenare se alege compusă din 2 arce de cerc de rază R_1 și R_2** tangente în punctul C și tangente tot în C la cercul de rostogolire. Punctul C va descrie prin rostogolire peste cercul w_1 hipocicloida H_1 , iar prin rostogolirea peste w_2 epicicloida E_2 . Conform celor prezentate mai sus, acestea sunt curbe conjugate reprezentând piciorul dintelui roții 1 (H_1), respectiv capul dintelui roții 2 (E_2). Raționând similar pentru porțiunea de rază R_2 a liniei de angrenare rezultă profilele conjugate formate din epicicloida E_1 și hipocicloida H_2 . Fiecare

dinte va avea profilul capului format dintr-o porțiune de epicloidă și profilul piciorului dintr-o porțiune de hipocicloidă.

Profilele celor doi dinți vor fi atunci:

$$p_1 = E_1 + H_1 \text{ și } p_2 = E_2 + H_2$$

(<http://en.wikipedia.org/wiki/Hypocycloid> ; <http://en.wikipedia.org/wiki/Epicycloid>)

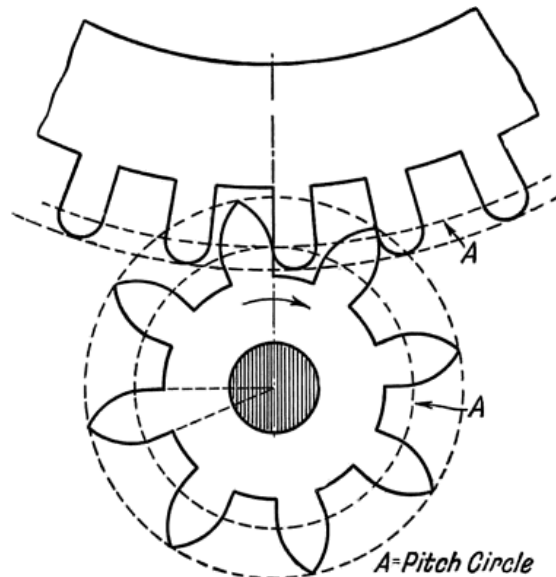


Fig. 6 Angrenaj având profil cicloidal utilizată la un mecanism de ceas
(**With the Watchmaker at the Bench**,(1943) by Donald de Carle (1893-1989)
<http://www.numericana.com/answer/gears.htm>)

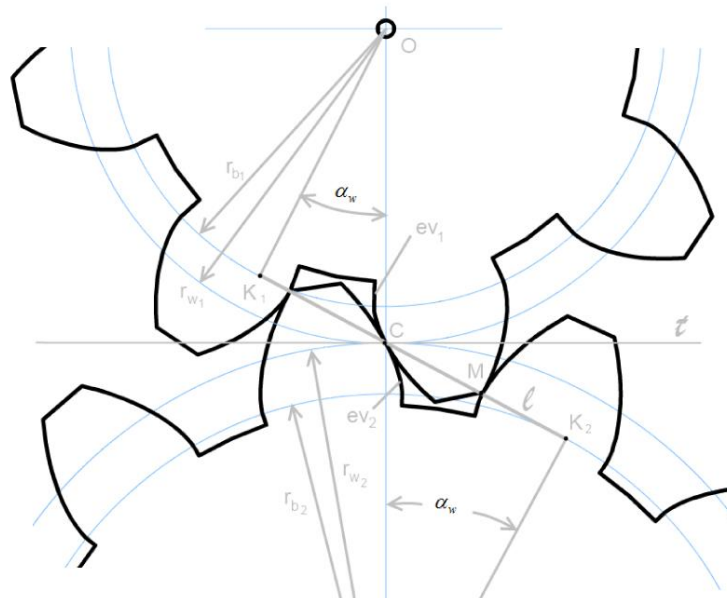


Fig. 7 Linie de angrenare dreaptă, profile evolventice

Pentru a obține profile evolventice – Fig.7, se consideră linia de angrenare l ca fiind o dreaptă care formează un unghi oarecare cu tangenta comună în C la cercurile de rostogolire.

Se imaginează o riglă suprapusă cu I și antrenată în mișcare de translație de către punctul M , între aceasta și cercurile de bază apare rostogolire pură. Un punct al acestei rigle va genera în planele roților 1 și 2 câte o evolventă (de cerc) e_1 , respectiv e_2 care sunt profile conjugate, ele purtând numele de profile evolventice.

Evolventa este locul geometric descris de un punct de pe o dreaptă care se află într-o mișcare de rostogolire (fără alunecare peste un cerc). În cazul generării profilelor evolventice pentru roți dințate, dreapta este linia de angrenare, iar cercul peste care se rostogolește este cercul de bază.

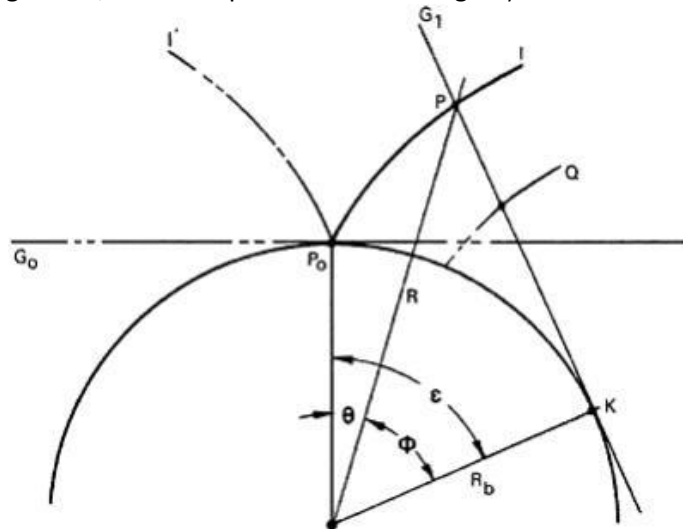


Fig.8 Generarea unei evolvente

În Fig.8. se notează funcția trigonometrică involută ca fiind:

$$inv\phi = \theta = tg\phi - \phi[rad]$$

Se preferă folosirea angrenajelor cu profile evolventice pentru că nu sunt sensibile la mici variații ale distanței dintre axe. sunt interschimbabile (linia de angrenare este o dreaptă pentru toate roțile), sensibilitate relativ scăzută pentru variații ale forței de angrenare, tehnologie de execuție relativ facilă.

Profilul dintelui de cremalieră plană conjugat unui profil evolventic

Planul dintelui care are ca cerc de rostogolire o linie dreaptă și execută o mișcare de translație se numește **cremalieră** Fig.9.

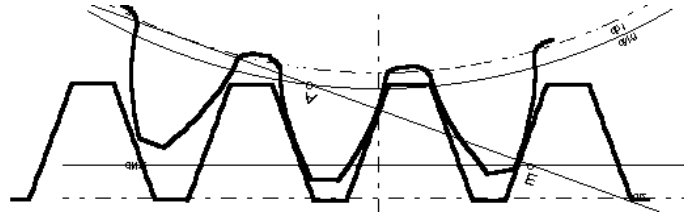


Fig.9 Angrenaj roată dințată-cremalieră
http://www.hexagon.de/info54/index_d.htm

Profilul dintelui de cremalieră conjugat unui profil evolventic este o dreaptă după cum se vede și în Fig.10. Danturile evolventice se definesc prin intermediul cremalierelor de referință standardizate. Cu alte cuvinte, având o cremalieră standardizată, se pot obține roți dințate cu profilul dinților standardizat.

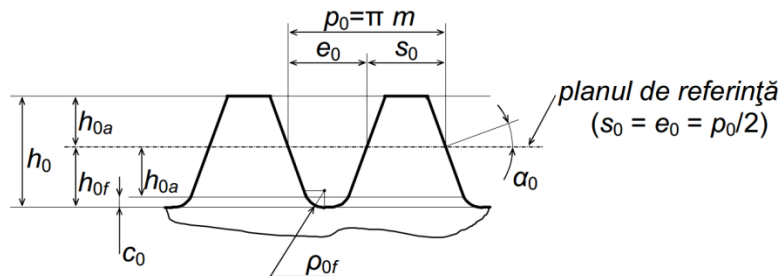


Fig.10 Cremaliera de referință standardizată
 Mihail Rașeev – Notițe de curs Componentele sistemelor mecanice 2009
<http://www.omtr.pub.ro/didactic/csm.pdf>

Cremaliera de referință standardizată după STAS 821-82 respectă următoarele dimensiuni caracteristice:

$\alpha_0 = 20^\circ$ - unghiul de presiune (sau unghi de angrenare)

h_{0a} - înălțimea capului dintelui $h_{0a} = f_0 m$ $f_0 = 1$

h_{0b} - înălțimea piciorului dintelui $h_{0f} = (f_0 + w_0)m$ $w_0 = 0.25$ coeficientul jocului de fund

m - modul

$$h = h_{0a} + h_{0f} = (2f_0 + w_0)m$$

$$p_0 = \pi m - \text{pasul pe cremalieră} \quad s_0 = e_0 = \frac{p_0}{2}$$

s_0 - grosimea dintelui pe linia de referință

e_0 - grosimea golului dintre dinți pe linia de referință

$$2\pi r = zp_0 \text{ de unde rezultă } p_0 = \frac{2\pi r}{z} \text{ iar } m = \frac{2r}{z}$$

Cremaliera generatoare stă la baza sculei cu care se vor prelucra roțile dințate, ea e identică cu cea de referință doar că se schimbă plinul cu golul și capul dintelui cu piciorul, porțiune a piciorului fiind racordată cu raza de curbura $\rho_{0f} = 0.38m$ (m =modul)

Gradul de acoperire

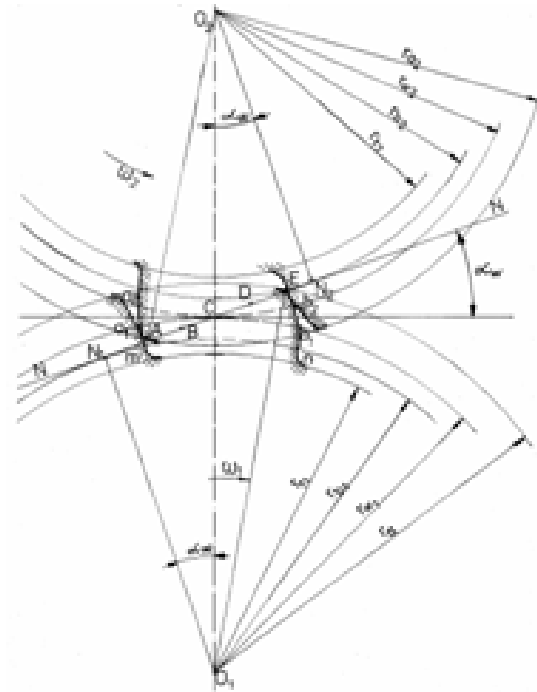


Fig.11 Gradul de acoperire al unui angrenaj plan

Dintele rotii conducatoare începe angrenarea la baza, în timp ce dintele rotii conduse la vârf - fig 11. Segmentul din dreapta de angrenare delimitat de cercurile de vârf AE, se numește segment de angrenare și reprezintă porțiunea activă din linia de angrenare. Arcele $a_1b_1 = a_2b_2$. Prin definiție se numește **grad de acoperire** raportul

$$\varepsilon = \frac{a_1b_1}{p} > 1 \quad (3)$$

Gradul de acoperire trebuie să fie mai mare decât unitatea pentru a se asigura continuitatea angrenării. Fizic, gradul de acoperire reprezintă numărul mediu de perechi de dinți aflați în angrenare. Gradul de acoperire caracterizează fiecare angrenaj. Cu cât gradul de acoperire este mai mare, cu atât condițiile de funcționare sunt mai favorabile.

$$\frac{a_1b_1}{p} = \frac{r_w}{r_{b1}} \quad \text{- pentru ca au același unghi de rostogolire;} \quad (4)$$

dar:

$$\frac{r_w}{r_{b1}} = \frac{1}{\cos \alpha_w} \quad (5)$$

deci:

$$a_1b_1 = mn \frac{1}{\cos \alpha_w} \quad (6)$$

$$\varepsilon = \frac{mn}{p \cos \alpha_w} = \frac{AE}{p \cos \alpha_w} \quad (7)$$

Din figura 11 se vede ca:

$$AE = N_1E + AN_2 - N_1N_2 \quad (8)$$

$$N_1E = \sqrt{r_{a1}^2 - r_{b1}^2} \quad (9)$$

$$AN_2 = \sqrt{r_{a2}^2 - r_{b2}^2} \quad (10)$$

$$N_1N_2 = N_1C + CN_2 = r_{w1} \sin \alpha_w + r_{w2} \sin \alpha_w = (r_{w1} + r_{w2}) \sin \alpha_w \quad (11)$$

Dar $(r_{w1} + r_{w2}) = a_w = O_1O_2 \quad (12)$

si reprezinta distanta între axe.

$$N_1N_2 = a_w \sin \alpha_w \quad (13)$$

$$AE = \sqrt{r_{a1}^2 - r_{b1}^2} + \sqrt{r_{a2}^2 - r_{b2}^2} - a_w \cdot \sin \alpha_w \quad (14)$$

cu care expresia gradului de acoperire devine:

$$E = \frac{\sqrt{r_{a1}^2 - r_{b1}^2} + \sqrt{r_{a2}^2 - r_{b2}^2} - a_w \cdot \sin \alpha_w}{p \cdot \cos \alpha} \quad (15)$$

Dar: $r_{a1} = \frac{m}{2} (z_1 + 2h_{oa1}^*) \quad (16)$

$$r_{a2} = \frac{m}{2} (z_2 + 2h_{oa2}^*) \quad (17)$$

$$r_{b1} = \frac{m}{2} z_1 \cos \alpha \quad (18)$$

$$r_{b2} = \frac{m}{2} z_2 \cos \alpha \quad (19)$$

$$a_w = \frac{m}{2} (z_1 + z_2) \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_w} \quad (20)$$

Înlocuind marimile razelor si distantei între axe, expresia gradului de acoperire devine:

$$\varepsilon = \frac{\frac{m}{2} \left[\sqrt{(z_1 + 2h_{oa1}^*)^2 - z_1^2 \cos^2 \alpha} + \sqrt{(z_2 + 2h_{oa2}^*)^2 - z_2^2 \cos^2 \alpha} - (z_1 + z_2) \sin \alpha_w \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_w} \right]}{m \cdot \pi \cdot \cos \alpha_w} \quad (21)$$

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{(z_1 + 2h_{oa1}^*)^2 - z_1^2 \cos^2 \alpha} + \sqrt{(z_2 + 2h_{oa2}^*)^2 - z_2^2 \cos^2 \alpha} - (z_1 + z_2) \operatorname{tg} \alpha_w \cdot \cos \alpha}{m \cdot \pi \cdot \cos \alpha_w} \quad (22)$$

În ultima expresie, gradul de acoperire depinde de:

- unghiul de angrenare α_w ;
- raportul de transmisie $i_{12} = -z_2/z_1$;
- înaltimea capetelor dintilor h_{oa1} si h_{oa2} .

De obicei $h_{oa1}^* = h_{oa2}^* = 1$, iar gradul de acoperire depinde de celelalte doua conditii, în special de unghiul de angrenare.

Pentru $\alpha_w = 20^\circ$ (valoarea standardizata) $\rightarrow \epsilon = 1,8$;
 $\alpha_w = 15^\circ \rightarrow \epsilon = 2,0$.

Angrenarea începe în punctul A. Pe porțiunea AB în angrenare vor exista doua perechi de dinti (perechea precedenta si perechea ce a intrat în angrenare în punctul A). În punctul B perechea precedenta iese din angrenare. Pe porțiunea BD vom avea în angrenare o singura pereche de dinti. Angrenarea se numeste unipara sau singulara. În punctul D începe angrenarea perechii urmatoare de dinti. Prin urmare, pe porțiunea DE vom avea în angrenare din nou doua perechi de dinti. Perechea de dinti analizata iese din angrenare în punctul E.

<http://www.scritube.com/tehnica-mecanica/Geometria-angrenajelor-cilindr21795.php>

