

CONCEPTE FUNDAMENTALE UTILE ÎN EXERCITAREA PROFESIEI DE INGINER

DISCIPLINA: MECANICA

1. MOMENTUL UNEI FORȚE ÎN RAPORT CU UN PUNCT ȘI ÎN RAPORT CU O AXĂ. CUPLU DE FORȚE

Momentul unei forțe \vec{F} în raport cu un punct O se definește ca fiind produsul vectorial dintre vectorul de poziție $\vec{r} = \overrightarrow{OA}$ al punctului de aplicație al forței și forța: $\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}$

Elementele caracteristice ale acestei mărimi vectoriale sunt: punctul de aplicație este chiar punctul de referință O; direcția este perpendiculară pe planul determinat de cei doi vectori; sensul este determinat de regula burghiului drept, iar mărimea este: $M_O = rF \sin \alpha$, $\vec{r} = rF \sin \alpha = Fd$, unde $d = r \sin \alpha$ se numește brațul forței ($\alpha = \angle(\vec{F}, \vec{r})$). Unitatea de măsură în SI pentru momentul forței este Nm. Dacă se exprimă analitic cei doi vectori, raportați la sistemul Oxyz:

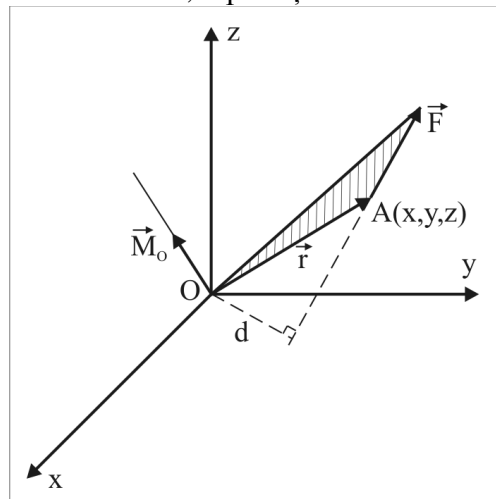


Fig. 1

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}, \text{ atunci } \vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = (yF_z - zF_y)\vec{i} + (zF_x - xF_z)\vec{j} + (xF_y - yF_x)\vec{k}$$

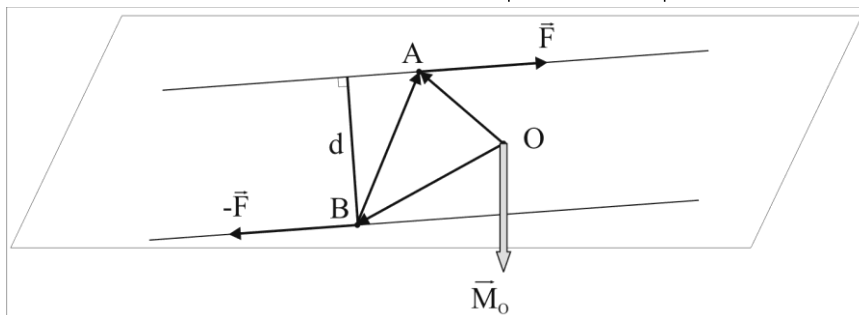


Fig. 2

Momentul unei forțe în raport cu o axă (Δ) se definește ca fiind proiecția pe axă a momentului forței calculat în raport cu acea axă. Dacă dreapta Δ face unghiurile α , β și γ față de axele sistemului Oxyz atunci versorul acestei axe este: $\vec{e} = \cos \alpha \vec{i} + \cos \beta \vec{j} + \cos \gamma \vec{k}$, iar

$$M_\Delta = \vec{M}_O \cdot \vec{e} = M_{Ox} \cos \alpha + M_{Oy} \cos \beta + M_{Oz} \cos \gamma.$$

Cuplul de forțe este format din două forțe egale ca mărime, de aceeași direcție și sensuri contrare, având suporturile paralele. Rezultanta acestui sistem de forțe este nulă, iar momentul cuplului este:

$$\vec{M}_O = \overrightarrow{OA} \times \vec{F} + \overrightarrow{OB} \times (-\vec{F}) = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} \times \vec{F} = \overrightarrow{BA} \times \vec{F} = \overrightarrow{AB} \times (-\vec{F})$$

Se constată că vectorul moment al cuplului este un vector liber, nu depinde de punctul în raport cu care se calculează. El este perpendicular pe cuplul de forțe, are semnul după regula burghiului drept și valoarea $M_O = F \cdot AB \sin \alpha = F \cdot d$; distanța d se numește brațul cuplului.

2. REDUCEREA UNUI SISTEM DE FORȚE

Se consideră că asupra unui corp rigid acționează o forță, într-un punct A. Se pune problema determinării efectului acesteia într-un alt punct O (fig.)

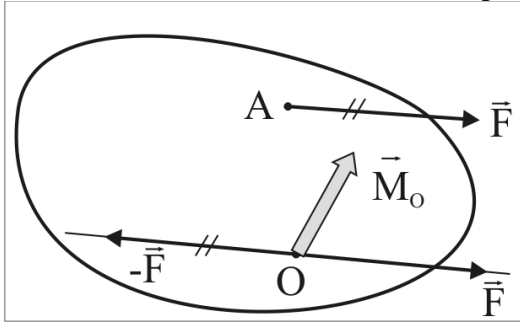


Fig. 3

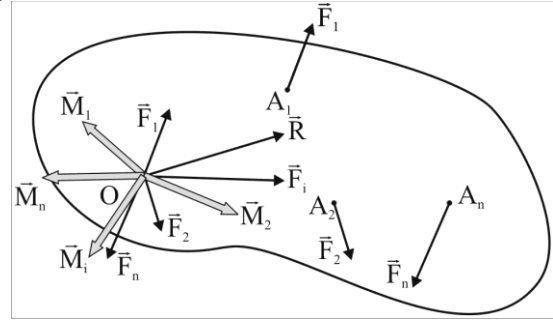


Fig.4

În punctul O se introduce un sistem echivalent cu zero, \vec{F} și $-\vec{F}$. S-a obținut un cuplu de forțe format din forța \vec{F} cu punctul de aplicație în A și forța $-\vec{F}$ cu punctul de aplicație în O. Acest cuplu este echivalent cu un moment $\vec{M}_O = \vec{OA} \times \vec{F}$, deoarece rezultanta unui cuplu este nulă. Astfel, în punctul O s-a obținut o forță \vec{F} identică cu forța inițială și un cuplu a cărui moment este egal cu momentul forței inițiale calculat în raport cu punctul O.

Aceste două elemente \vec{F}, \vec{M}_O formează tursorul de reducere al forței \vec{F} în raport cu punctul O.

Dacă asupra rigidului acționează un sistem de n forțe, reducând fiecare forță în punctul O, se va obține în acest punct un sistem de forțe concurente și un sistem de vectori concurenți ai momentelor forțelor în raport cu punctul O. Prin urmare, se va obține o rezultantă

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \text{ și un moment resultant:}$$

$$\vec{M}_O = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \dots + \vec{M}_n = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i = \sum_{i=1}^n \vec{OA}_i \times \vec{F}_i.$$

Cele două elemente \vec{R} și \vec{M}_O constituie tursorul de reducere al sistemului de forțe dat, în raport cu punctul O.

Dacă se exprimă analitic mărimile vectoriale $\vec{F}_i = F_{x_i} \vec{i} + F_{y_i} \vec{j} + F_{z_i} \vec{k}$, $\vec{OA}_i = x_i \vec{i} + y_i \vec{j} + z_i \vec{k}$, se obține

expresia analitică a rezultantei: $\vec{R} = \left(\sum_{i=1}^n F_{x_i} \right) \vec{i} + \left(\sum_{i=1}^n F_{y_i} \right) \vec{j} + \left(\sum_{i=1}^n F_{z_i} \right) \vec{k} = R_x \vec{i} + R_y \vec{j} + R_z \vec{k}$, cu cele

trei proiecții pe axe

$$R_x = \sum_{i=1}^n F_{x_i}, R_y = \sum_{i=1}^n F_{y_i} \text{ și } R_z = \sum_{i=1}^n F_{z_i}. \text{ Expresia analitică a momentului resultant este :}$$

$$\vec{M}_O = \sum \vec{OA}_i \times \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_i & y_i & z_i \\ F_{x_i} & F_{y_i} & F_{z_i} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^n (y_i F_{z_i} - z_i F_{y_i}) \vec{i} + \sum_{i=1}^n (z_i F_{x_i} - x_i F_{z_i}) \vec{j} + \sum_{i=1}^n (x_i F_{y_i} - y_i F_{x_i}) \vec{k} = M_{Ox} \vec{i} + M_{Oy} \vec{j} + M_{Oz} \vec{k}$$

iar proiecțiile momentului resultant pe axele sistemului Oxyz sunt:

$$M_{Ox} = \sum_{i=1}^n (y_i F_{z_i} - z_i F_{y_i}), M_{Oy} = \sum_{i=1}^n (z_i F_{x_i} - x_i F_{z_i}) \text{ și } M_{Oz} = \sum_{i=1}^n (x_i F_{y_i} - y_i F_{x_i})$$

3.ECHILIBRUL CORPULUI RIGID LIBER ȘI SUPUS LA LEGĂTURI

Un corp rigid este liber dacă poate ocupa orice poziție în spațiu sub acțiunea forțelor exterioare.

Considerând că asupra unui astfel de corp acționează sistemul de forțe exterioare \vec{F}_i , $i = \overline{1, n}$, pentru echilibrul său trebuie ca efectul acestui sistem de forțe să fie nul, adică elementele tursorului de reducere într-un punct să fie nule.

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0$$

$$\vec{M}_O = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \dots + \vec{M}_n = \sum_{i=1}^n \overrightarrow{OA_i} \times \vec{F}_i = 0$$

Ceea ce corespunde următoarelor ecuații scalare:

$$\left\{ \begin{array}{l} R_x = \sum_{i=1}^n F_{x_i} = 0, R_y = \sum_{i=1}^n F_{y_i} = 0, R_z = \sum_{i=1}^n F_{z_i} = 0 \\ M_{Ox} = \sum_{i=1}^n y_i F_{z_i} - z_i F_{y_i} = 0, M_{Oy} = \sum_{i=1}^n z_i F_{x_i} - x_i F_{z_i} = 0, M_{Oz} = \sum_{i=1}^n x_i F_{y_i} - y_i F_{x_i} = 0, \end{array} \right.$$

Aceste șase ecuații conduc la determinarea celor șase parametri care determină poziția de echilibru a corpului.

În cazul corpului supus la legături, unele mișcări sunt împiedicate. Axioma legăturilor spune că în fiecare punct al corpului în care există o legătură aceasta poate fi înlocuită cu o forță sau / și moment care să aibă același efect ca și legătura. Prin urmare, asupra corpului vor acționa două sisteme de forțe : unul al forțelor exterioare \vec{F}_i $i = 1, 2, \dots, n$ cunoscute, respectiv al forțelor de legătură (reacțiuni) \vec{F}_{jl} $j = 1, 2, \dots, p$ necunoscute.

Dacă se reduc cele două sisteme de forțe într-un punct se obține un tursor format din rezultanta forțelor exterioare și de legătură, respectiv momentul resultant al forțelor exterioare și de legătură.

Pentru echilibru este necesar ca aceste elemente să fie nule

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{\text{ext}} + \vec{R}_l = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i + \sum_{j=1}^p \vec{F}_j = 0 \\ \vec{M}_{O_{\text{ext}}} + \vec{M}_{O_l} = \sum_{i=1}^n \overrightarrow{OA_i} \times \vec{F}_i + \sum_{j=1}^p \overrightarrow{OB_j} \times \vec{F}_{jl} = 0, \end{array} \right.$$

unde B_j sunt punctele de aplicație ale forțelor de legătură, A_i sunt punctele de aplicație ale forțelor date (exterioare).

Aceste două ecuații vectoriale se proiectează pe axele unui sistem de referință $Oxyz$ obținându-se șase ecuații scalare. Din aceste ecuații scalare se pot determina forțele de legătură și, dacă e cazul, și poziția de echilibru. Dacă numărul necunoscutelor este mai mare decât 6, problema e static nedeterminată. Dacă toate forțele exterioare sunt în plan numărul ecuațiilor scalare ce se obțin sunt 3. Deci problema e static determinată dacă are 3 necunoscute. Cele mai importante legături sunt: rezemarea, care introduce o necunoscută (reacțiunea normală), articulația introduce 3 necunoscute; iar încastrarea introduce 6 necunoscute. Legătura cu fir introduce o singură necunoscută, valoarea efortului din fir, direcția fiind în lungul firului. În cazul forțelor plane articulația introduce 2 necunoscute, iar încastrarea 3 necunoscute.

4. STUDIUL MIȘCĂRII UNUI PUNCT MATERIAL ÎN COORDONATE CARTEZIENE

Într-un sistem de coordonate carteziene Oxyz (Fig. 1), legea de mișcare a unui punct se exprimă sub forma $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$

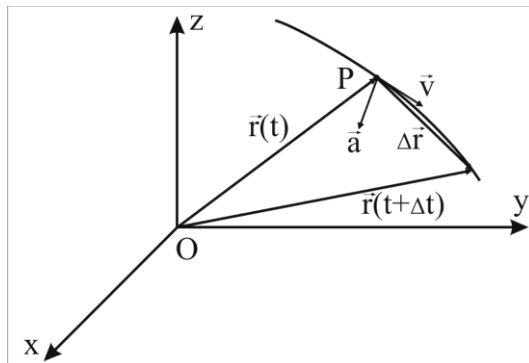


Fig. 5

Mișcarea punctului material se cunoaște, dacă se cunoaște poziția acestuia în fiecare moment, adică coordonatele acestuia, ca funcții de timp $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$. Aceste funcții reprezintă ecuațiile parametrice ale curbei pe care se mișcă punctul. Prin eliminarea timpului în aceste ecuații se obțin ecuațiile implicite ale curbei $f_1(x, y, z) = 0$ și $f_2(x, y, z) = 0$, adică două suprafețe care intersectate dau curba amintită. Traectoria reprezintă locul geometric descris de punctul material în mișcarea sa și poate să coincidă cu întreaga curbă sau să fie numai o parte din curbă obținută prin ecuațiile de mai sus.

Viteza medie, a punctului material se definește ca fiind $\vec{v}_m = \Delta\vec{r}/\Delta t$. Pentru obținerea vitezei

momentane se face $\Delta t \rightarrow 0$, deci $\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \dot{\vec{r}}(t)$. Se constată că viteza devine

tangentă la traectorie. Exprimarea în coordonate carteziene a vitezei este $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}(t)\vec{i} + \dot{y}(t)\vec{j} + \dot{z}(t)\vec{k}$, de unde se obțin proiecțiile vitezei pe axele de referință

$v_x = \dot{x}(t)$, $v_y = \dot{y}(t)$, $v_z = \dot{z}(t)$, iar modulul este $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$. Accelerația

medie se definește ca fiind $\vec{a}_m = \Delta\vec{v}/\Delta t$. Accelerația momentană se obține pentru $\Delta t \rightarrow 0$,

$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{x}(t)\vec{i} + \ddot{y}(t)\vec{j} + \ddot{z}(t)\vec{k}$ având proiecțiile $a_x = \ddot{x}(t)$, $a_y = \ddot{y}(t)$, $a_z = \ddot{z}(t)$ și

modulul $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}$

5. MIȘCAREA DE rotație cu axă fixă a unui corp rigid. LEGEA DE MIȘCARE. DISTRIBUȚIA DE VITEZE ȘI ACCELERAȚII.

Un corp rigid are mișcare de rotație cu axă fixă dacă două puncte ale sale rămân fixe în tot timpul mișcării. Dacă se consideră un al treilea punct P din corp acesta este determinat prin trei coordonate. Între coordonatele celor două puncte fixe și coordonatele punctului P se pot scrie două relații de legătură date de distanțele dintre ele. Poziția lui fiind determinată printr-o singură funcție de timp. Prin urmare în mișcarea de rotație, corpul are un grad de libertate. Acesta se alege ca fiind unghiul dintre axele O_1x_1 și Ox , egal cu unghiul dintre axele O_1y_1 și Oy (Fig. 1). Deci legea de mișcare a unui corp cu axă fixă se exprimă prin relația $\theta = \theta(t)$.

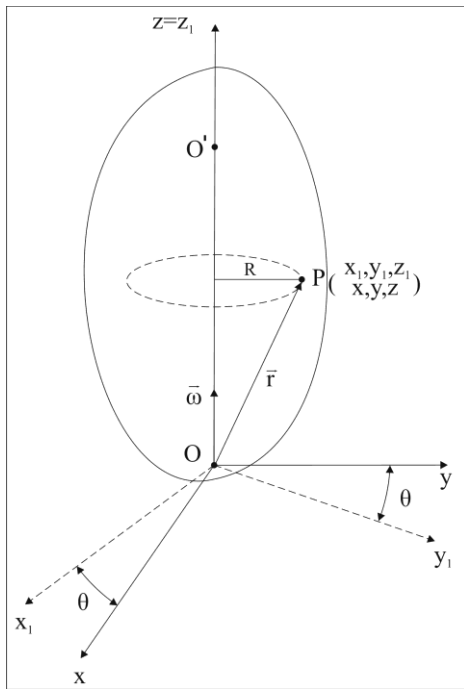


Fig. 6

Vectorul viteză unghiulară este dirijat în lungul axei de rotație și este $\vec{\omega} = \dot{\theta} \vec{k} = \dot{\theta} \vec{k}_1$, adică are valoarea la un moment dat egală cu derivata în raport cu timpul a legii de mișcare. Punctul O fiind un punct fix $\vec{v}_O = 0$. Prin urmare se poate

dezvolta produsul vectorial $\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = -\omega y \vec{i} + \omega x \vec{j}$,

ceea ce înseamnă că proiecțiile vitezei unui punct din corp pe axele sistemului legat de corp sunt: $v_x = -\omega y$, $v_y = \omega x$, $v_z = 0$. Se poate concluziona că viteza oricărui punct din rigid este situată într-un plan perpendicular pe axa de rotație $v_z = 0$. Singurele puncte de viteză nule sunt pe axa de rotație.

Valoarea absolută este $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \omega \cdot \sqrt{x^2 + y^2} = \omega \cdot R$ unde R este distanța de la punctul considerat la axa de rotație. Reprezintă raza cercului descris de punctul P în mișcarea de rotație.

Pentru distribuția de accelerații se are în vedere formula accelerației unui punct în mișcarea generală a unui corp $\vec{a} = \vec{a}_O + \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}$, unde $\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}}$ este accelerația unghiulară, iar $\vec{a}_O = 0$, O fiind un punct fix.

Din această formulă se obțin proiecțiile accelerației punctului considerat pe axele de coordonate ale sistemului Oxyz. $a_x = -\omega^2 x - \varepsilon y$, $a_y = \varepsilon x - \omega^2 y$, $a_z = 0$, iar valoarea este $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = R \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$

Se poate constata că singurele puncte care au accelerația nulă sunt pe axa de rotație, iar accelerațiile tuturor punctelor sunt situate în plane perpendiculare pe pe xa de rotație.

6.MIȘCAREA VIBRATORIE. DEFINIȚII ȘI NOȚIUNI FUNDAMENTALE

Mișcarea alternativă a unui sistem material față de o stare de referință se numește vibrație sau oscilație. Mișcările vibratorii sunt periodice dacă toate elementele cinematice (poziția, viteza și accelerația) se repetă identic după un interval de timp T, numit perioadă. Cea mai simplă mișcare periodică este mișcarea a cărei ecuație (lege de mișcare) se exprimă prin funcțiile trigonometrice sinus sau cosinus și se numește mișcare armonică $x = A_0 \sin(\omega t + \varphi)$ sau $x = A_0 \cos(\omega t + \psi)$.

Mărimile caracteristice ale unei vibrații armonice sunt: elongația x, distanța la un moment dat față de reper; cea mai mare elongație $x_{\max} = A$ se numește amplitudine; perioada T, intervalul de timp după care mișcarea se repetă identic și se determină ținând seama că funcția sinus are perioada unghiulară de 2π , deci $\sin(\omega t + \varphi) = \sin(\omega(t+T) + \varphi)$ sau $\omega t + \omega T + \varphi = \omega t + \varphi + 2\pi$ de unde $T = 2\pi/\omega$. Perioada se măsoară în secunde. Frecvența reprezintă numărul de vibrații (oscilații) complete efectuate în unitatea de timp (secundă) $f = 1/T = \omega/2\pi$ unitatea de măsură pentru frecvență este $1\text{Hz} = 1/\text{s} = \text{s}^{-1}$. Pulsatia ω reprezintă numărul de oscilații complete efectuate în 2π secunde. Legătura dintre frecvență și pulsație este: $\omega = 2\pi f$. Pulsatia se măsoară în rad/s.

Argumentul funcției sinus sau cosinus se numește fază $(\omega t + \varphi)$, iar φ este faza inițială.

Viteza unei mișcări vibratorii se obține prin derivarea în raport cu timpul a elongației:

$$v = \dot{x} = A\omega \cos(\omega t + \varphi) = A\omega \sin(\omega t + \varphi + \pi/2).$$

Se constată că amplitudinea vitezei este $v_{\max} = A\omega$ și că viteza este defazată cu $\pi/2$ față de mișcarea oscilatorie.

Accelerația unei mișcări vibratorii se obține prin derivarea în raport cu timpul a vitezei
 $a = v = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi) = A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi + \pi)$
 Se constată ca accelerația este defazată cu π înainte față de mișcare și cu $\pi/2$ înainte față de viteză.

Amplitudinea accelerației este $a_{\max} = \omega^2 A = 4\pi^2 f^2 A$. Din această expresie se poate observa ca în mișcările vibratorii pot apărea accelerații foarte mari, chiar dacă amplitudinea este mică, dacă frecvența este mare.

În Figura 1 se prezintă diagrama (graficul variației în timp a legii de mișcare) pentru o mișcare vibratorie armonică, iar în Figura 2 este reprezentat cel mai simplu model mecanic care execută o mișcare armonică. Acesta este format dintr-un arc de constantă elastică k și un corp de masă m .

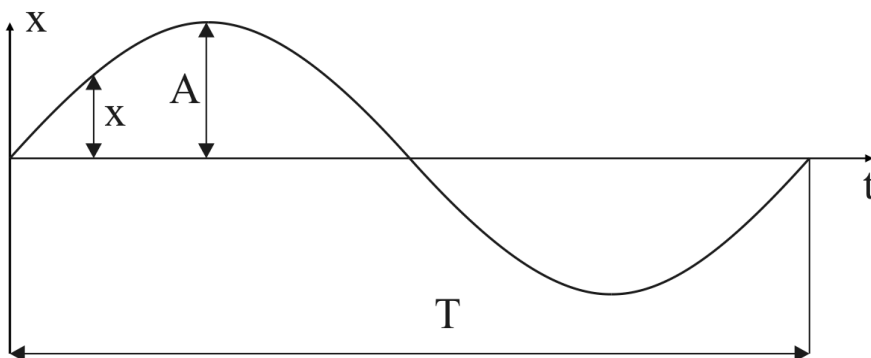


Fig.7

7.MOMENTE DE INERTȚIE MECANICE. DEFINITII ȘI RELAȚII ÎNTRE ELE. VARIAȚIA MOMENTELOR DE INERTȚIE ÎN RAPORT CU AXE PARALELE (FORMULELE LUI STEINER).

Momentele de inerție arată modul în care este distribuită masa unui corp față de diferite elemente geometrice de referință: punct, axă, plan.

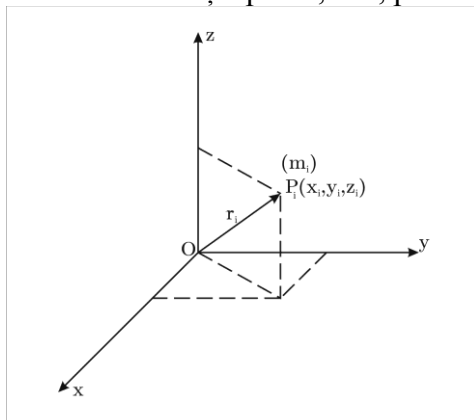


Fig. 8.

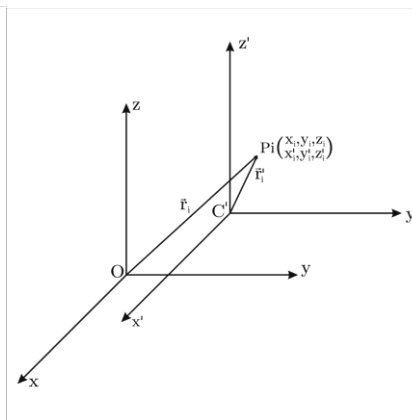


Fig.9

Față de sistemul Oxyz se pot defini următoarele momente de inerție: momente de inerție

polare: $J_O = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2 = \sum_{i=1}^N m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)$, momente de inerție axiale:

$$J_x = \sum_{i=1}^N m_i d_{ix}^2 = \sum_{i=1}^N m_i (y_i^2 + z_i^2), J_y = \sum_{i=1}^N m_i d_{iy}^2 = \sum_{i=1}^N m_i (x_i^2 + z_i^2), J_z = \sum_{i=1}^N m_i d_{iz}^2 = \sum_{i=1}^N m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

momente de inerție planare: $J_{xOy} = \sum_{i=1}^N m_i d_{ixOy}^2 = \sum_{i=1}^N m_i z_i^2, J_{yOz} = \sum_{i=1}^N m_i d_{iyOz}^2 = \sum_{i=1}^N m_i x_i^2,$

$$J_{xOz} = \sum_{i=1}^N m_i d_{ixOz}^2 = \sum_{i=1}^N m_i y_i^2$$

Acestea se numesc momente de inerție obișnuite, ele sunt expresii pătratice definite în funcție de coordonatele punctelor. Față de momentele de inerție obișnuite se mai definesc momente de inerție

centrifugale: $J_{xy} = \sum_{i=1}^N m_i x_i y_i$, $J_{yz} = \sum_{i=1}^N m_i y_i z_i$, $J_{zx} = \sum_{i=1}^N m_i z_i x_i$ Unitatea de măsură pentru toate

momentele de inerție este $\text{kg} \cdot \text{m}^2$. Se pot stabili ușor următoarele relații între momentele de inerție $J_x + J_y + J_z = 2J_O$, $J_x + J_{yOz} = J_O$, $J_y + J_{xOz} = J_O$, $J_z + J_{xOy} = J_O$, $J_{xOy} + J_{yOz} + J_{zOx} = J_O$,

$$J_{xOy} + J_{xOz} = J_x, \quad J_{yOz} + J_{xOy} = J_y, \quad J_{xOy} + J_{yOz} = J_z$$

Aceste relații nu sunt independente, dar sunt utile pentru că determinând trei dintre ele pe baza acestor relații se determină celelalte patru.

Se consideră sistemul material raportat la un sistem de referință $Oxyz$ și la un sistem de referință $Cx'y'z'$, C fiind centrul de masă al sistemului material, iar axele celor două sisteme sunt paralele.

Între momentele de inerție, în raport cu cele două sisteme se pot stabili următoarele relații: Pentru momentele axiale $J_x = J_{x'} + M y_C^2 + z_C^2 = J_{x'} + M d_{xx'}^2$, $J_y = J_{y'} + M z_C^2 + x_C^2 = J_{y'} + M d_{yy'}^2$,

$$J_z = J_{z'} + M x_C^2 + y_C^2 = J_{z'} + M d_{zz'}^2$$

Pentru momente de inerție planare: $J_{xOy} = J_{x'Cy'} + M z_C^2$, $J_{yOz} = J_{y'Cz'} + M x_C^2$, $J_{xOz} = J_{x'Cz'} + M y_C^2$

Pentru momente de inerție centrifugale: $J_{xy} = J_{x'y'} + M x_C y_C$, $J_{yz} = J_{y'z'} + M y_C z_C$, $J_{zx} = J_{x'z'} + M x_C z_C$

Pentru momentul de inerție polar: $J_O = J_C + M x_C^2 + y_C^2 + z_C^2$

8. IMPULSUL UNUI PUNCT MATERIAL ȘI AL UNUI CORP RIGID. TEOREMA IMPULSULUI

Se definește impulsul unui punct material ca fiind o mărime vectorială egală cu produsul dintre masa punctului material și vectorul vitezei: $\vec{h} = m\vec{v}$. Unitatea de măsură pentru impuls în SI este kgm/s . Dacă se consideră un sistem de puncte materiale, impulsul acestuia se obține prin

însușirea impulsurilor tuturor punctelor sistemului $\vec{H} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i$. În cazul unui corp rigid suma se

transformă într-o sumă Riemann, iar impulsul total se calculează prin integrala pe domeniul D $\vec{H} = \int_D \vec{v} dm$, \vec{v} este viteza unui punct curent, iar dm este elementul de masă.

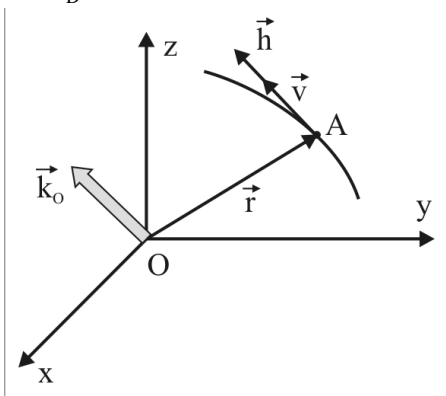


Fig.10

Dacă se derivează impulsul unui punct, în raport cu timpul, ținând cont de legea lui Newton $m\vec{a} = \vec{F}$, unde m este masa lui, \vec{a} este accelerația, iar \vec{F} este forța rezultantă care acționează asupra lui, se obține: $\dot{\vec{h}} = m\dot{\vec{v}} = m\vec{a} = \vec{F}$, adică, derivata în raport cu timpul a impulsului unui punct material este egală cu forța rezultantă care acționează asupra lui: $\dot{\vec{h}} = \vec{F}$. Aceasta reprezintă teorema impulsului. În cazul în care forța rezultantă este nulă se obține $\dot{\vec{h}} = 0$, adică impulsul punctului material se conservă ($\vec{h} = \text{const.}$).

În mod asemănător, pentru un corp, se demonstrează că $\dot{\vec{H}} = \vec{R}_{\text{ext}} + \vec{R}_l$, unde \vec{R}_{ext} este rezultanta forțelor exterioare,

iar \vec{R}_l rezultanta forțelor de legătură ce acționează asupra corpului.

Momentul cinetic al unui punct material și al unui corp rigid în raport cu un punct. Teorema momentului cinetic.

Momentul cinetic al unui punct material în raport cu un punct O se definește ca o mărime vectorială egală cu produsul vectorial dintre vectorul de poziție al punctului material în raport cu punctul O , și impulsul punctului material: $\vec{k}_O = \vec{r} \times \vec{h} = \vec{r} \times m\vec{v}$. Unitatea de măsură a momentului cinetic este kgm^2/s . Din definiție rezultă că momentul cinetic este un vector orientat perpendicular pe planul format de vectorul impuls și polul O având sensul dat de regula burghiului. Pentru un

sistem de puncte materiale se obține $\vec{K}_O = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{h}_i = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$. În cazul unui corp rigid suma se transformă într-o integrală de domeniu, astfel ca momentul cinetic se calculează prin integrala

$$\vec{K}_O = \int_D \vec{r} \times \vec{v} dm.$$

Se obțin formule distincte pentru diferite mișcări ale corpului rigid. În cazul

mișcării de rotație cu axă fixă se obține $\vec{K}_O = -J_{xz}\omega \vec{i} - J_{yz}\omega \vec{j} + J_z\omega \vec{k}$, unde J_{xz} , J_{yz} sunt momente de inerție centrifugale, J_z este momentul de inerție în raport cu axa de rotație (oz), iar ω este viteza unghiulară. Dacă axa de rotație este o axă principală de inerție (o axă de simetrie) $\vec{K}_O = J_z\omega \vec{k}$, iar ω este viteza unghiulară.

Dacă se derivează în raport cu timpul momentul cinetic în raport cu punctul O, rezultă, utilizând legea lui Newton: $\dot{\vec{K}}_O = \dot{\vec{r}} \times m\vec{v} + \vec{r} \times m\dot{\vec{v}} = \vec{r} \times \vec{F}$, unde $\vec{v} \times m\vec{v} = 0$, adică derivata în raport cu timpul a momentului cinetic în raport cu un punct O este egală cu momentul în raport cu punctul O, al forței care acționează asupra punctului material: $\dot{\vec{K}}_O = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}_O$

În cazul în care momentul resultant al forțelor care acționează asupra unui punct material este nul, momentul cinetic se conservă: $\vec{K}_O = \text{const.}$

În mod asemănător, pentru un corp, se demonstrează că $\dot{\vec{K}}_{O,C} = \vec{M}_{O,C} R_{\text{ext}} + \vec{M}_{O,C} R_1$, unde $\vec{M}_{O,C} R_{\text{ext}}$ este momentul forțelor exterioare, iar $\vec{M}_{O,C} R_1$ momentul forțelor de legătură ce acționează asupra corpului calculate în raport cu un punct fix O sau centrul de masă C.

9. LUCRUL MECANIC ȘI PUTEREA UNEI FORȚE CONSTANTE ȘI ALE UNEI FORȚE VARIABLE. LUCRUL MECANIC ȘI PUTEREA UNUI SISTEM DE FORȚE.

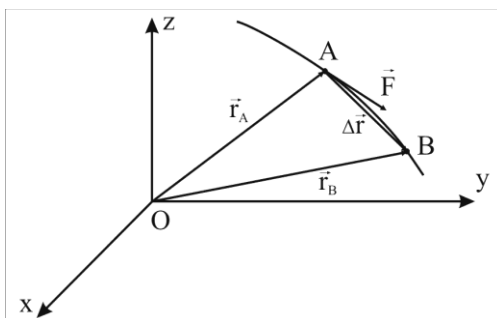


Fig.11

Lucrul mecanic efectuat de o forță \vec{F} , de mărime constantă, la deplasarea unui punct material dintr-un punct A în punctul B, de-a lungul unei direcții care face cu forța unghiul α , este o mărime scalară egală cu:

$L = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r} = F \Delta r \cos \alpha$, adică produsul scalar dintre forța \vec{F} și vectorul deplasare $\Delta \vec{r}$. Unitatea de măsură pentru lucrul mecanic în SI este Joule, (notată J). Un Joule $1J = 1Nm$. Dacă unghiul $\alpha \in 0, \pi/2$ $L > 0$, se spune că forța este motoare, dacă unghiul $\alpha = \pi/2$, $L = 0$; adică forțele perpendiculare pe deplasare nu dau lucru mecanic,

dacă $\alpha \in \pi/2, \pi$, $L < 0$, se spune că forța este rezistentă.

Puterea produsă de o forță constantă \vec{F} reprezintă lucrul mecanic produs de forță în unitatea de timp: $P = L/t$. Puterea este un scalar cu semn, putând fi pozitivă, negativă, sau nulă. Unitatea de măsură în SI pentru putere este Watt-ul, notat $1W = 1Nm/s$.

Pentru o forță variabilă, într-o deplasare elementară $d\vec{r}$, lucru mecanic elementar, notat dL , este $dL = \vec{F} \cdot d\vec{r}$. Rezultă că lucrul mecanic efectuat de forța variabilă \vec{F} la deplasarea corpului din A în B este: $L_{AB} = \int_{AB} dL = \int_{AB} \vec{F} \cdot d\vec{r}$. Dacă se exprimă forța și deplasarea elementară prin proiecțiile pe axe: $\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$ și $d\vec{r} = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k}$, lucrul mecanic elementar este

$dL = F_x dx + F_y dy + F_z dz$. Se întâlnesc cazuri în care proiecțiile pe axe ale forței \vec{F} sunt derivatele parțiale ale unei funcții de poziție $U(x,y,z)$ astfel: $F_x = \partial U / \partial x$, $F_y = \partial U / \partial y$, $F_z = \partial U / \partial z$. Pentru aceste forțe lucrul mecanic elementar este: $dL = \partial U / \partial x dx + \partial U / \partial y dy + \partial U / \partial z dz = dU$, adică este diferențiala totală a funcției U . Funcția $U(x,y,z)$ se numește funcție de forță, iar lucrul mecanic al

acestor forțe, cu semn schimbat, se numește energie potențială. $E_p = -L = -U_{x,y,z} + C$, unde C este o constantă. Forțele care dau energie potențială se numesc forțe conservative.

Lucrul mecanic al unui sistem de forțe care acționează asupra unui corp rigid se obține prin însumarea lucrurilor mecanice ale tuturor forțelor $dL = \sum_{i=1}^n dL_i = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i d\vec{r}_{i1} = \vec{R} d\vec{r}_{10} + \vec{M}_O d\vec{\theta}$ unde \vec{R} și \vec{M}_O sunt elementele taylorului de reducere a sistemului de forțe în punctul O , $d\vec{r}_{10}$ deplasarea elementară a punctului O , $d\vec{\theta}$ deplasarea elementară unghiulară a corpului. Puterea acestui sistem de forțe este $P = dL/dt = \vec{R} d\vec{r}/dt + \vec{M}_O d\theta/dt = \vec{R}\vec{v} + \vec{M}_O\vec{\omega}$. Dacă corpul se află, ca urmare a acțiunii forțelor, în mișcarea de translație, $\vec{\omega} = 0$, iar puterea este $P = \vec{R}\vec{v}$. În cazul în care mișcarea este de rotație $P = \vec{M}_O\vec{\omega}$, \vec{v} fiind viteza corpului la un moment dat, respectiv $\vec{\omega}$ este viteza unghiulară. Dacă \vec{M}_O și $\vec{\omega}$ au același sens puterea este pozitivă, respectiv negativă în sens contrar. Pentru mișcarea de rotație formula puterii mai poate fi scrisă și în următoarele forme : $P = M_O\omega = M_O 2\pi/T = 2\pi f M_O$. De cele mai multe ori se folosește în locul frecvenței de rotație, turația, care se dă în rotații pe minut. Se poate scrie relația dintre frecvența de rotație și turație $f = n/60$, și în acest caz se obține, pentru puterea unui motor, formula $P = \pi n/30 M_O$, unde M_O este momentul cuplului motor.

10. ENERGIA CINETICĂ A UNUI PUNCT MATERIAL ȘI A UNUI CORP ÎN MIȘCĂRILE DE TRANSLAȚIE, ROTAȚIE ȘI PLANĂ. TEOREMA ENERGIEI CINETICE.

Prin definiție, energia cinetică a unui punct material de masă m și viteză v este $E_c = \frac{mv^2}{2}$.

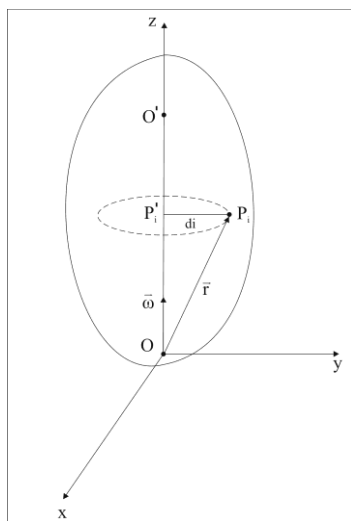


Fig.12

În cazul unui sistem de puncte materiale energia cinetică se exprimă prin însumarea energiilor cinetice ale tuturor punctelor

$$E_c = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2}. \text{ Pentru calculul energiei cinetice a unui corp}$$

trebuie avut în vedere tipul de mișcare a acestuia. Pentru mișcarea de translație, vitezele tuturor punctelor sunt egale la un moment

$$\text{dat, deci } E_c = \left(\sum_{i=1}^n m_i \right) \frac{v^2}{2} = \frac{Mv^2}{2}, \text{ unde } M \text{ este masa întregului}$$

corp

În cazul mișcării de rotație în jurul unei axe, viteza unui punct este $|\vec{v}_i| = |\vec{\omega} \times \vec{r}_i| = \omega d_i$. Înlocuind în formula de calcul a energiei cinetice pentru un corp, se obține

$$E_c = \sum_{i=1}^N \frac{m_i \omega d_i^2}{2} = \left(\sum_{i=1}^N m_i d_i^2 \right) \frac{\omega^2}{2} = J_\Delta \frac{\omega^2}{2}, \text{ unde } J_\Delta \text{ este}$$

momentul de inerție mecanic în raport cu axa de rotație. Dacă corpul are o mișcare de rotație cu punct fix (O), iar axele sistemului $Oxyz$, legat de corp, sunt axe principale de inerție, energia

cinetică se calculează cu formula $E_c = \frac{1}{2} J_x \omega_x^2 + J_y \omega_y^2 + J_z \omega_z^2$. Pentru mișcarea plan paralelă, axa

instantanee de rotație este axa Δ . considerând o axă Cz paralelă cu Δ prin centrul de masă C , se poate scrie formula lui Steiner : $J_\Delta = J_z + M \cdot IC^2$, unde IC este distanța de la axa instantanee de rotație la centrul de masă. Înlocuind în formula de calcul a energiei cinetice de rotație, rezultă

$$E_c = \frac{Mv_C^2}{2} + \frac{J_z \omega^2}{2}, \text{ unde s-a ținut cont că } |\vec{v}_C| = |\vec{\omega} \times \vec{IC}| = \omega \cdot IC.$$

Teorema energiei cinetice. Pornind de la legea fundamentală a dinamicii pentru un punct material supus la legături, după înmulțirea scalară cu vectorul $d\vec{r}$, aceasta se scrie sub forma :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} d\vec{r} = \vec{F}_{\text{ext}} d\vec{r} + \vec{F}_l d\vec{r}, \text{ adică } m\vec{v}d\vec{v} = dL_{\text{ext}} + dL_l \text{ sau } d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = dE_c = dL_{\text{ext}} + dL_l, \text{ adică, variația}$$

energiei cinetice într-o deplasare elementară este egală cu lucrul mecanic elementar al forțelor direct aplicate (exterioare) și de legătură ce acționează asupra punctului.

Pentru o deplasare finită, din poziția inițială A în poziția B, integrând relația precedentă, se obține teorema energiei cinetice sub formă integrală $E_{CA} - E_{CB} = L_{\text{ext } A \rightarrow B} + L_{l \text{ } A \rightarrow B}$, adică variația energiei cinetice într-o deplasare finită a punctului material este egală cu lucrul mecanic al forțelor direct aplicate (exterioare) și de legătură.

În cazul unui corp rigid se aplică legea fundamentală a dinamicii pentru un punct i al corpului, înmulțită cu deplasarea elementară față de sistemul fix : $d\vec{r}_i$

$$m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} d\vec{r}_i = \vec{F}_{\text{ext}} d\vec{r}_i + \vec{F}_l d\vec{r}_i + \sum_{j=1}^N \vec{F}_{ij} d\vec{r}_i, \text{ Scriind această lege pentru toate punctele materiale ale}$$

corpului rigid și ținând cont de faptul că lucrul mecanic al forțelor interioare (perechi) este nul, se obține forma diferențială a teoremei energiei cinetice: $dE_c = dL_{\text{ext}} + dL_l$, adică, diferențiala energiei cinetice a unui sistem material rigid(corp) este egală cu lucrul mecanic elementar al tuturor forțelor exterioare (date) și de legătură ce acționează asupra lui. Sub formă integrală această teoremă este:

$$E_{CA} - E_{CB} = L_{\text{ext } A \rightarrow B} + L_{l \text{ } A \rightarrow B}. \text{ Această formă este frecvent utilizată în aplicații.}$$